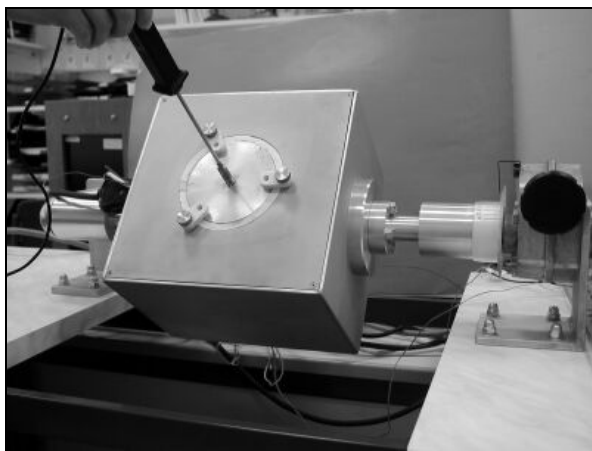


# A tapintó hőmérséklet érzékelő hőtani számítása, tekintetbe véve a környezet hőmérséklet-terének a felület dőlésszögétől való függését

András Emese

## 1. Bevezetés

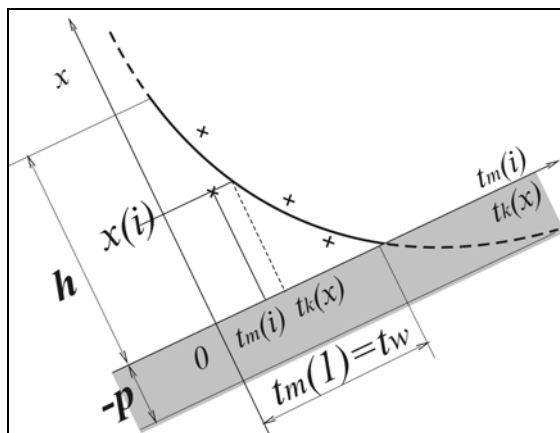
Az [1] és [2] tanulmányokban közölt mérési eredmények igazolják, hogy adott felület és adott tapintó érzékelő esetén, ha a felület hőmérséklete állandó, a mérési hiba a felületnek a gravitációs térhez viszonyított helyzetétől függ (1. ábra). Ez a tény annak tudható be, hogy a fűtött felület által létrehozott természetes áramlás hőmérséklet-tere a felület dőlésszögének függvénye.



1. ábra

## 2. A környezet hőmérsékletét leíró $t_k(x)$ függvény

A tárcsa felületével fizikai kapcsolatban lévő közeg (levegő) hőmérséklete kísérleti úton (méréssel) lett meghatározva.



2. ábra

Így gyakorlatilag egy:

$$[x(i), t_m(i)], i \in [1, n]$$

$n$  értékpárból álló halmaz állt rendelkezésünkre a  $t_k(x)$  függvény analitikus formájának megállapítására (2. ábra).

A közeg hőmérséklete a következő analitikus függvény formájában írható le:

$$t_k(x) = t_w \cdot \left[ a_{ka} + \frac{b_{ka}}{x_a + p_a} + \frac{c_{ka}}{(x_a + p_a)^2} \right] \quad (1)$$

ahol  $x_a = x/h$  és  $p_a = p/h$  dimenzió nélküli mennyiségek,  $t_w$  a felület hőmérséklete,  $x$  a felülettől mért távolság,  $h$  az érzékelő rúdjának a hossza,  $p$  az u.n. aszimptota távolság. Bevezetve a következő jelöléseket:

$$x_1(i) = \frac{1}{\frac{x(i)}{h} + \frac{p}{h}} \quad y_1(i) = \frac{t_m(i)}{t_w}$$

az (1) összefüggés a következő formát ölti:

$$y_1 = a_{ka} + b_{ka} \cdot x_1 + c_{ka} \cdot x_1^2 \quad (2)$$

Az  $a_{ka}$ ,  $b_{ka}$  és  $c_{ka}$  együtthatók értékei meghatározhatók a másodfokú megközelítő függvény képleteivel az  $[x_1(i), y_1(i)]$ ,  $n \in [1, n]$  adathalmazra vonatkoztatva.

A  $p$  aszimptota távolság a  $t_k(0) = t_w$  feltételből került meghatározásra, amikor:

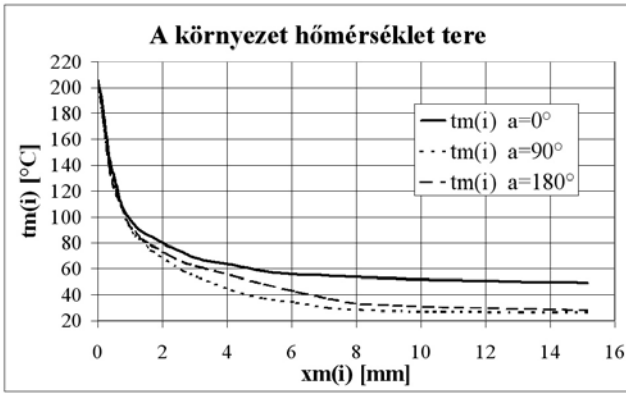
$$a_{ka} + \frac{b_{ka}}{p_a} + \frac{c_{ka}}{p_a^2} = 1$$

A 3. ábrán látható a környezet  $t_m(i)$  mért hőmérséklete (állandó  $t_w = 205,2^\circ\text{C}$  felületi hőmérsékleten),  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$  és  $\alpha = 180^\circ$  dőlésszögű felület esetén.

Az 1. táblázat tartalmazza a  $p$  aszimptota távolság, illetve az  $a_{ka}$ ,  $b_{ka}$  és  $c_{ka}$  együtthatók értékeit.

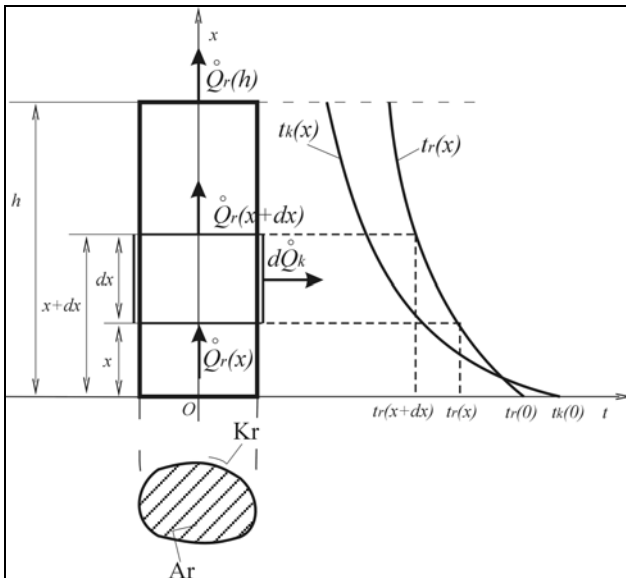
1. táblázat

$\alpha$ [°]	0	90	180
$p$ [mm]	0,2	1,2	0,6
$a_{ka}$ [-]	0,2253019 8	0,1102917 9	0,1163081 6
$b_{ka}$ [-]	0,0022665 0	0,0025407 1	0,0038748 1
$c_{ka}$ [-]	- 0,0000016 4	0,0000366 3	- 0,0000013 6



3. ábra

### 3. Hőátvitel egyenes, állandó keresztmetszetű rúdon keresztül, változó hőmérsékletű közegbe



4. ábra

A tapintó érzékelő egy  $A_r$  keresztmetszetű,  $K_r$  kerületű és  $h$  hosszúságú rúdnak tekinthető (4. ábra) a következő határfeltételekkel:

- $x = 0 \Rightarrow t_r(x) = t_r(0) = \text{állandó}$
- $x = h \Rightarrow \left. \frac{dt_r}{dx} \right|_{x=h} = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{Q}_r(h) = 0$

A rúd  $A_r$  keresztmetszetén áthaladó hőáram:

$$\overset{\circ}{Q}_r(x) = -\lambda_r \cdot A_r \cdot \frac{dt_r(x)}{dx} \quad (3)$$

ahol  $\lambda_r$  a rúd hővezetési tényezője  $t_r(x)$  hőmérsékleten.

A  $K_r$  kerületű rúd  $K_r \cdot dx$  palástfelületén keresztül hőátadással leadott hőáram:

$$d\overset{\circ}{Q}_k(x) = \alpha_r \cdot K_r \cdot dx \cdot [t_r(x) - t_k(x)] \quad (4)$$

ahol  $\alpha_r$  a  $t_m(x) = (t_r(x) + t_k(x))/2$  középhőmérsékletnek és a  $\Delta t(x) = t_r(x) - t_k(x)$  hőmérsékletkülönbségnek megfelelő hőátadási tényező. A rúdon áthaladó hőáramok különbsége

$$d\overset{\circ}{Q}_r(x) = \overset{\circ}{Q}_r(x) - \overset{\circ}{Q}_r(x + dx) \quad (5)$$

egyenlő kell legyen a palástfelületen keresztül leadott  $d\overset{\circ}{Q}_k(x)$  hőárammal:

$$d\overset{\circ}{Q}_r(x) = d\overset{\circ}{Q}_k(x) \quad (6)$$

Tekintetbe véve a (3), (4) és (5) kifejezéseket, a (6) alapján a következő másodfokú differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{d^2 t_r}{dx^2} = a^2 [t_r(x) - t_k(x)] \quad (7)$$

$$a = \sqrt{\frac{\alpha_r K_r}{\lambda_r A_r}} \quad (8)$$

ahol  $a$  a hőáram tényező. Az  $a$  tényező nem állandó a rúd mentén, mivel úgy a  $\lambda_r$  mint az  $\alpha_r$  is hőmérsékletfüggő. Első megközelítésben feltételezzük, hogy az  $a$  tényező állandó a rúd mentén és ezt a következőképpen határozhatjuk meg:

$$a = \sqrt{\frac{\alpha_{rm} K_r}{\lambda_{rm} A_r}} \quad (9)$$

ahol  $\lambda_{rm}$  a rúd átlag hővezetési-,  $\alpha_{rm}$  pedig az átlag hőátadási tényezője.

Ezek a tényezők az átlag közezhőmérséklet és az átlag rúdhőmérséklet függvényében kerülnek meghatározásra:

$$t_{ka} = \frac{1}{h} \int_0^h t_k(x) dx \quad (10)$$

$$t_{ra} = \frac{1}{h} \int_0^h t_r(x) dx \quad (11)$$

A (7) inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$t_r(x) = [c_1(x) + c_{1h}] e^{ax} + [c_2(x) + c_{2h}] e^{-ax} \quad (12)$$

A  $c_1(x)$  és  $c_2(x)$  függvények meghatározhatók, tekintetbe véve a környezet hőmérséklet változását leíró függvény dimenzionális formáját:

$$t_k(x) = t_w \left[ a_k + \frac{b_k}{x+p} + \frac{c_k}{(x+p)^2} \right] \quad (13)$$

$$c_{1,2}(x) = \frac{t_w}{2} \left\{ \left( a_k \pm \frac{a \cdot c_k}{x+p} \right) e^{\mu a \cdot x} \pm a \cdot (b_k \pm a \cdot c_k) \cdot e^{\pm a \cdot p} \cdot \left[ \ln \left( \frac{x}{p} + 1 \right) + \sum_{i=1}^m \frac{(\mu a)^i}{i!} \cdot \frac{(x+p)^i}{i} \right] \right\} \quad (14)$$

A  $c_{1h}$  és  $c_{2h}$  állandók a két peremfeltételből határozhatók meg:

$$c_{1h,2h} = \frac{[t_r(0) - c_1(0) - c_2(0) + c_{2,1}(h)] e^{\mu a \cdot h} - c_{1,2}(h) \cdot e^{a \cdot h}}{e^{a \cdot h} + e^{-a \cdot h}} \quad (15)$$

A környezet  $t_{ka}$  átlaghőmérséklete, tekintetbe véve a  $t_k(x)$  változását leíró (13) függvényt, egyenlő lesz:

$$t_{ka} = \frac{t_w}{h} \left[ a_k \cdot h + b_k \cdot \ln \frac{h+p}{p} + c_k \frac{h}{(h+p) \cdot p} \right] \quad (16)$$

A rúd  $t_{ra}$  átlaghőmérséklete kiszámítható az alábbi képlettel:

$$t_{ra} = \frac{1}{h \cdot a} \left[ c_{1h} \cdot (e^{a \cdot h} - 1) - c_{2h} \cdot (e^{-a \cdot h} - 1) \right] + \frac{1}{n-1} \left[ \frac{f(0) + f(h)}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} f(x(i)) \right] \quad (17)$$

amelyben  $n$  a  $h$  hosszúságú rúd elemi szálainak száma és:

$$f(x(i)) = c_1(x(i)) \cdot e^{a \cdot x(i)} + c_2(x(i)) \cdot e^{-a \cdot x(i)} \quad (18)$$

A  $t_r(x)$  első deriváltja a következő kifejezéssel számítható:

$$\frac{dt_r}{dx} = a \cdot \left\{ [c_1(x) + c_{1h}] \cdot e^{ax} - [c_2(x) + c_{2h}] \cdot e^{-ax} \right\} \quad (19)$$

A rúdba belépő hőáram:

$$\dot{Q}_r = -\lambda_r \cdot A_r \frac{dt_r}{dx} \Big|_{x=0} \quad (20)$$

Tekintetbe véve a (19) képletet, a hőáram értéke egyenlő lesz:

$$\dot{Q}_r = -a \cdot \lambda_r \cdot A_r [c_1(0) - c_2(0) + c_{1h} - c_{2h}] \quad (21)$$

#### 4. Az $a$ hőáram tényező számítási képlete

A tapintó érzékelő rúdja egy  $d$  külső átmérőjű és  $s$  falvastagságú cső, melynek kerülete  $Kr = \pi d$  és keresztmetszete  $Ar = \pi ds$ , tehát az  $a$  tényező a következő formában fejezhető ki:

$$a = \sqrt{\frac{\alpha_{rm}}{\lambda_{rm} \cdot s}} \quad (22)$$

Az  $\alpha_{rm}$  hőátadási tényező a következő képlettel számítható:

$$\alpha_{rm} = \frac{Nu \cdot \lambda_{ma}}{X} \quad (23)$$

ahol  $Nu$  a Nusselt szám,  $X$  a rúd jellemző geometriai mérete,  $\lambda_{ma}$  a közeg hővezetési tényezője  $t_{ma}$  hőmérsékleten:

$$t_{ma} = \frac{t_{ra} + t_{ka}}{2} \quad (24)$$

A Nusselt szám az  $Ra$ -Rayleigh és a  $Pr$ -Prandtl szám függvénye [3]:

$$Nu = f(Ra, Pr) \quad (25)$$

A (25) összefüggés ténylegesen csak két esetben ismert [3]: függőleges rúd ( $Nu_h$  – hosszirányú áramlás) és vízszintes rúd ( $Nu_k$  – keresztirányú áramlás) esetén.

$$Nu_h = 0,68 + \frac{0,67 \cdot Ra^{0,25}}{\left[ 1 + 0,671 / Pr^{9/16} \right]^{4/9}} \quad (26)$$

$$Nu_k = \left[ 0,6 + \frac{0,387 \cdot Ra^{1/6}}{\left( 1 + 0,721 / Pr^{9/16} \right)^{4/9}} \right]^2 \quad (27)$$

A  $t_{ma} \in [50 \div 400]^\circ\text{C}$  hőmérséklet tartományban jó megközelítéssel elfogadható, hogy a Prandtl szám állandó és értéke:  $Pr = 0,68$ . Hosszirányú áramlás esetén  $X = h$ , míg keresztirányúnál  $X = d$ . Tekintetbe véve a (23), (26) és (27) kifejezéseket, a hőátadási tényezők értékei hosszirányú illetve keresztirányú áramlás esetén a következő összefüggésekkel határozhatók meg:

$$\alpha_{rmh} = \lambda_{ma} \left[ \frac{0,68}{h} + 0,512 \left( \frac{Rar \cdot \Delta t_a}{h} \right)^{0,25} \right] \quad (28)$$

$$\alpha_{rmk} = \lambda_{ma} \left[ \frac{0,6}{d^{1/2}} + 0,291 \cdot (Rar \cdot \Delta t_a)^{1/6} \right]^2 \quad (29)$$

A fenti képletekben  $\Delta t_a = t_{ra} - t_{ka}$  az átlag hőmérséklet különbség,  $Rar$  pedig a fajlagos Rayleigh szám:

$$Rar = \frac{Ra}{X^3 \cdot \Delta t} \quad (30)$$

$$Rar = g \frac{\beta_{ma} \cdot \rho_{ma} \cdot c_{pma}}{v_{ma} \cdot \lambda_{ma}} \quad (31)$$

ahol  $g=9,81 \text{ m/s}^2$  – a gravitációs gyorsulás,  $\beta_{ma}$  – a közeg köbös hőtágulási együtthatója,  $\rho_{ma}$  – a közeg sűrűsége,  $c_{pma}$  – a közeg fajhője állandó nyomáson,  $v_{ma}$  – a közeg kinematikai viszkozitása, valamennyi a  $t_{ma}$  hőmérsékleten.

## 5. Számértékek meghatározása

A (17) képlet alkalmazása a rúd  $t_{ra}$  átlaghőmérsékletének megállapítására az  $a$  tényező előzetes ismeretét igényli. Így a  $t_{ra}$  értéke csak fokozatos közelítéssel (iterációs számítással) határozható meg. Első lépésben feltételezzük, hogy a  $t_r(x)$  leírható az alábbi másodfokú függvénnyel, amely teljesíti a 3. pontban előírt feltételeket:

$$t_r(x) = t_r(h) + \frac{t_r(0) - t_r(h)}{h} \cdot (x-h)^2 \quad (32)$$

A (32) képlettel számolt átlaghőmérséklet egyenlő lesz:

$$t_{ra} = \frac{1}{h} \int_0^h t_r(x) \cdot dx \quad (33)$$

$$t_{ra} = \frac{t_r(0) + 2 \cdot t_r(h)}{3} \quad (34)$$

Az  $x=0$ -ban a rúd hőmérséklete egyenlő lesz:

$$t_r(0) = t_w + dt_s \quad (35)$$

ahol  $t_w$  a felület hőmérséklete,  $dt_s$  a mért hiba. A  $t_r(h)$  nem ismert, de jó közelítéssel feltételezhetjük az első lépésben:

$$t_r(h) \cong t_k(x) \quad (36)$$

Tehát a rúd átlaghőmérséklete az alábbi kifejezéssel határozható meg:

$$t_{ra}(1) = \frac{t_r(0) + 2 \cdot t_k(x)}{3} \quad (37)$$

A  $t_{ka}$  és a  $t_{ra}(1)$  ismerete lehetővé teszi első lépésben az  $a$  tényező értékének megközelítő számítását ( $a(1)$ ). A további számításoknál a  $t_{ra}(k)$  értékeit a (17) képlettel kell meghatározni.

Az  $\alpha_{rmh}$  számításánál a (28) képletet használtuk, míg az  $\alpha_{rmk}$  számításánál a (29) képletet alkalmaztuk és bevezettünk egy  $f=0,44$  szorzótényezőt. Ennél nagyobb szorzótényező esetén a  $t_r(x)$  nem monoton csökkenő függvény formájában jelentkezett.

A méréseket, illetve a számításokat egy Almemo típusú tapintó érzékelőre végeztük el, melynek geometriai jellemzői:  $d=3\text{mm}$ ,  $s=0,25\text{mm}$ ,  $h=150\text{mm}$ . A (14) képletben szereplő

$$\sum_{i=1}^m \frac{(\mu a)^i}{i!} \cdot \frac{(x+p)^i}{i}$$

tag az  $e^{\mu ax}$  függvény Mac-Laurin sorbafejtéséből adódik, így elméletileg  $m=\infty$ . A gyakorlatban elegendő ha  $m=20$ -at veszünk. A (17) képletben szereplő

$$\sum_{i=2}^{n-1} f(x(i))$$

tag egy határozott integrál számítás megközelítése. Elegendő pontosság érhető el, ha az  $x \in [0, h]$  tartományt  $n=150$  egyenlő részre osztjuk.

A méréseket  $t_w=205,2^\circ\text{C}$  állandó felületi hőmérsékleten végeztük el,  $\alpha=0^\circ, 90^\circ$  és  $180^\circ$  felületi dőlésszög esetén. Az adott felületi hőmérsékletnek megfelelő  $dt_s$  hibák, valamint az  $n_i=10$  iterációs számításból kapott  $a$  hőáram tényező értékek a 2. táblázatban szerepelnek:

2. táblázat

$\alpha$ [°]	$dt_s$ [°C]	$a$ [1/m]
0	-15,8	34,39
90	-19,1	37,11
180	-18,1	35,20

A (21) képlettel meghatározható a tapintó érzékelőbe belépő  $\dot{Q}_r$  hőáram, valamint a  $dt_s$  hőmérséklet hiba ismeretében megállapítható az  $R_{sk}$  kontakt hőellenállás értékei, melyek a 3. táblázatban találhatók:

$$R_{sk} = -\frac{dt_s}{\dot{Q}_r} \quad (38)$$

3. táblázat

$\alpha$ [°]	$\dot{Q}_r$ [W]	$R_{sk}$ [°C/W]
0	0,1738	90,932
90	0,2073	92,159
180	0,1951	92,786

## 6. Következtetések

A cikkben feltüntetett mérések és számítási eredmények igazolják az [1] és [2] –ben leírt feltételezést, hogy a  $t_k(x)$  környezeti

hőmérséklet-mező függése a fűtött felület  $\alpha$  dőlésszögétől okozza a tapintó érzékelő mérési hibájának dőlésszög függőségét.

A tapintó érzékelő kontakt hőellenállása [4] a felület anyagának minőségétől (hővezetési tényező), a felület érdességétől, az érzékelő típusától és a felület hőmérsékletétől függ, tehát nem függ a felület dőlésszögétől, ha a felsorolt tényezők nem módosulnak. A cikkben alkalmazott fizikai modell és számítási módszer helyességét igazolják az  $R_{sk}$  kontakt hőellenállás értékek, melyek gyakorlatilag nem változnak az  $\alpha$  dőlésszög függvényében.

## 7. Szakirodalom

[1] András E., "The influence of surface inclination on the calibration of surface temperature sensors", *Proceedings, XVII. IMEKO World Congress*, Dubrovnik, 2003, pp. 1598-1603.

[2] András E., "Calibration of surface temperature sensors in case of different surface inclination", *Proceedings of Temperatur 2003*, VDI-Berichte **1784**, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2003, pp. 49-56.

[3] Környey T., "Hőátvitel", Műegyetemi kiadó, Budapest, 1999.

[4] Bernhard F., Augustin S., Mammen H., Sommer K.D., Tegeler E., Wagner M., Demisch U., "Calibration of contacting sensors for temperature measurements on surfaces", *Proceedings of Tempmeko 1999*, VDE Verlag GmbH, Berlin, 1999, vol. 1, pp. 257-262.

SZERZŐ: András Emese, Hőmérséklet- és Optikai Mérések Osztály, Országos Mérésügyi Hivatal (OMH), 1124 Budapest, Németvölgyi út 37-39, telefon: 458-5963, fax: 458-5927, e-mail: e.andras@omh.hu