

**Miskolci Egyetem
Gépészmérnöki Kar
Villamosmérnöki Intézet
Automatizálási Tanszék**

A Digitális irányítás című tantárgy előadásainak rövidített anyaga

Készítette: **Dr. Szecső Gusztáv**

Miskolc, 2002. szeptember

1. Bevezetés

A digitális irányítástechnika fejlődésére is az LSI integrált áramkörök megjelenése volt igen nagy hatással. A digitálistechnika alkalmazása a folyamat-automatizálásban 1960-ban kezdődött meg, amikor az első folyamatirányító számítógépet üzembe helyezték. 1970-es években ezek a számítógépek katódsugárcsöves monitorokkal működtek, majd az 1980-tól minden évben számuk 20-30 százalékkal emelkedett. 1971-ben értékesítették az első mikroprocesszorokat, amelyek forradalmasították az ipari automatizálást. Olyan - régebben kidolgozott - elméleti eredmények jelenhettek meg a gyakorlatban, amelyeket ennek előtte az analóg irányítástechnika képtelen volt megvalósítani:

- szoftver-realizálású szabályozási módok (előre- és visszacsatolás, kaszkád- és arányszabályozás stb.),
- önhangoló tulajdonság, adaptivitás,
- optimalizálás, elosztott intelligenciával történő komplex irányítás.

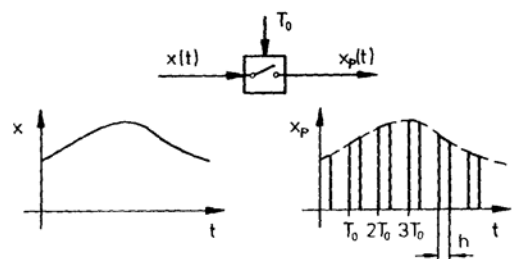
Ez az oktatási segédlet azokat az elméleti eredményeket taglalja, amelyeken az előbb említett tulajdonságokkal bíró rendszereket kidolgozták.

1.1. A segédletben alkalmazott jelölések magyarázata

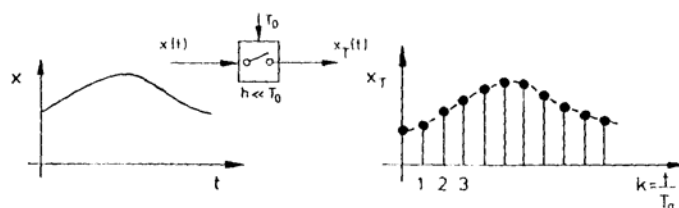
A	átviteli tényező
A, a, F	rendszermátrix
A(s), A(z)	átviteli, impulzus átviteli függvény nevezőjének transzformált alakja
B, b, G	bemeneti mátrix
B(s), B(z)	átviteli, impulzus átviteli függvény számlálójának transzformált alakja
C, c	kimeneti mátrix
D, d	segédmátrix
e(k)	diszkrét hibajel
f	általános függő változó jele vagy frekvencia
G(z), H(z)	impulzus átviteli függvény
HG(z)	zérusrendű tartó hatását figyelembe vevő impulzus átviteli függvény
G_R(z), G_C(z)	digitális szabályozó impulzus átviteli függvénye
I	egységmátrix
K, K	erősítés vagy erősítés vektor
K_p	arányos átviteli tényező
k	mintavételek száma
<i>L</i>	a Laplace-transzformáció jele
N_r	alapjel szűrő
p	polinom gyöke, pólus
p₁, L, p_v	dead-beat szabályozó nevezőjének paraméterei
P_{xx}, P_{yy}	teljesítménysűrűség spektrum
r	súlyozó faktor
r(t)	időfüggő referenciajel
q₀, q₁, q₂	digitális PID szabályozó paraméterei vagy dead-beat szabályozó számlálójának paraméterei
s	Laplace-operátor
S_e, S_u, S_{eu}	folytonos vagy diszkrét integrál funkció

t	idő, mint független változó, s
T_i	időállandó, s
T_1, T_2, T_0	kemence hőmérséklet, $^{\circ}\text{C}$
T_H, T_d	holtidő, s
T_s, T_0	mintavételi idő, s
T_I	integrálási vagy utánállási idő
T_D	differenciálási vagy elébevágási idő
$u(t), u(k)$	általános bemenőjel vagy gerjesztő jel
$w(t)$	általános időfüggő jel vagy időfüggő alapjel
$W(s), W(z)$	alapjel transzformált alakjai
$x(t), x(k)$	általános időfüggő jel vagy fázisváltozó illetve ezek diszkrét alakja
$\dot{x}(t), x(k+1)$	a fázisváltozó idő szerinti deriváltja vagy ennek diszkrét alakja
$x_r(t), X_r(s)$	rendelkezőjel vagy transzformáltja
$x_v(t), X_v(s)$	a végrehajtójel vagy transzformáltja
$x_s(t), X_s(s)$	a szabályozott jellemző vagy transzformáltja
$x_a(t), X_a(s)$	az alapjel vagy transzformáltja
$Y(s), Y(z)$	átviteli függvény vagy impulzus átviteli függvény
$Y_c(s)$	analóg szabályozó átviteli függvénye
\mathcal{Z}	a z-transzformáció jele
z	a z-transzformált operátora
ω	körfrekvencia, rad/s
ω_0	mintavételi körfrekvencia, rad/s
ω_{sh}	Shannon vagy Nyquist frekvencia
$\Phi(t), \Phi(s)$	átmeneti mátrix vagy transzformáltja
$\mathbf{0}$	nullvektor

1.2. A mintavételezés



Egy amplitudó modulált mintavételezett jel előállítása
Jellemzők: moduláló impulzus szélessége (h) és a mintavételi idő T_0



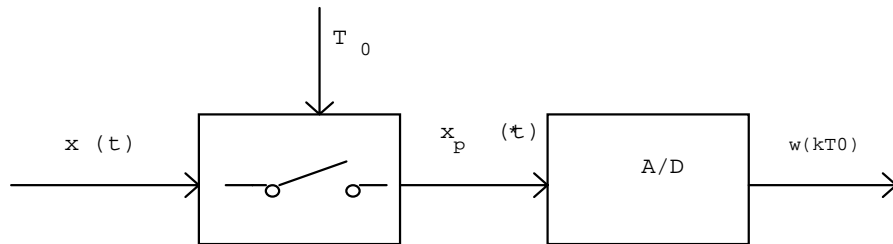
A mintavételezett idősor előállítása mintavevővel ($h \ll T_0$)

1.1. ábra

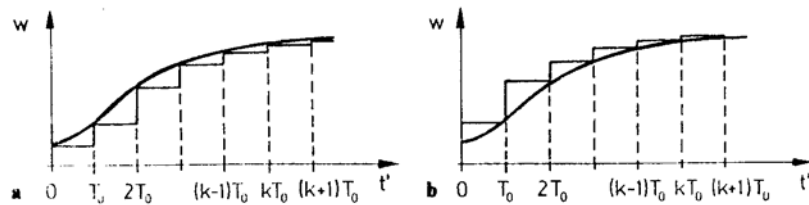
A mintavételi idő, mint legfontosabb paraméter, jelölése: $T_0 = T_s$ és $[T_0] = s$. A mintavételezett jelre pedig írhatjuk, hogy:

$$\left. \begin{aligned} x_T(t) &= x(kT_0) \text{ ha } t = kT_0, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots \\ x_T(t) &= 0 \text{ ha } kT_0 < t < (k+1)T_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

1.3. A mintavételezett jelek kvantálása A/D átalakító segítségével

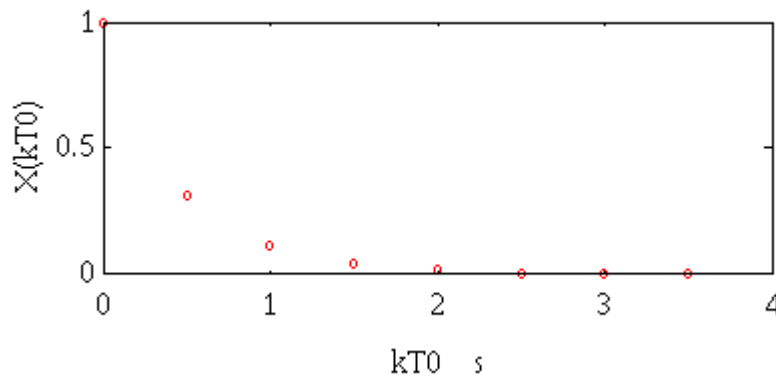


1.2. ábra



1.3. ábra. A mintavételezett jel visszaállítása zérusrendű tartóval

1.1. példa. Legyen $x(t) = e^{-\alpha t}$ és $\alpha = 2 \text{ 1/s}$ valamint $T_0 = T_s = 0,5 \text{ s}$, így $x(kT_0) = e^{-\alpha kT_0} = e^{-2(k \cdot 0,5)}$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Rajzoljuk fel a mintavételezett függvényt.



1.4. ábra

A kicsi időközönként vett minták esetén a matematikai leírást az impulzus jelekre a következőkben leírtak szerint adhatunk. Legyen a mintavevő bemenetén az $x(t)$ jel, amelyet $p(t)$ időfüggvényű jellel mintavételezünk. Ennek hatására a mintavevő kimenetén megjelenő impulzus időfüggvény $x_p(t)$.

$$x_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)[1(t - kT_0) - 1(t - kT_0 - hT_0)], \text{ ahol } h \text{ a mintavevő impulzus hosszát jelöli. Ennek}$$

$$\text{Laplace-transzformáltja } X_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \left[\frac{1 - e^{-hs}}{s} \right] e^{-kT_0s}.$$

1.4. Integrálás diszkrét rendszereknél

Az 1.3. ábra alapján a következő egyenletek írhatók fel:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{T_I} \int_0^t w(t') dt' \\ x(kT_0) &= \frac{1}{T_I} \sum_{v=0}^{k-1} T_0 w(vT_0) \\ x((k+1)T_0) &= \frac{1}{T_I} \sum_{v=0}^k T_0 w(vT_0) \end{aligned} \right\} \text{, amiből} \quad (1.2)$$

$$x((k+1)T_0) - x(kT_0) = \frac{T_0}{T_I} w(kT_0). \quad \text{Vezessük be: } a_1 = -1 \text{ és } b_1 = \frac{T_0}{T_I} \text{ változókat és kapjuk az}$$

$$x_k + a_1 x_{k-1} = b_1 w_{k-1} \quad \text{elsőrendű differenciaegyenletet.}$$

1.5. Differenciálás diszkrét rendszereknél

Folytonos	Diszkrét
$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \approx$	$\frac{x(k) - x(k-1)}{T_0}$
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t - \Delta t)}{dt}}{\Delta t} \approx$	$\frac{x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)}{T_0^2}$

1.1. táblázat

1.2. példa. Egytárolós arányos tag diszkrétizációja: $A_p = b_0$ és $a_0 = \frac{T_1}{T_0} + 1$ és

$$a_1 = -\frac{T_1}{T_0}$$

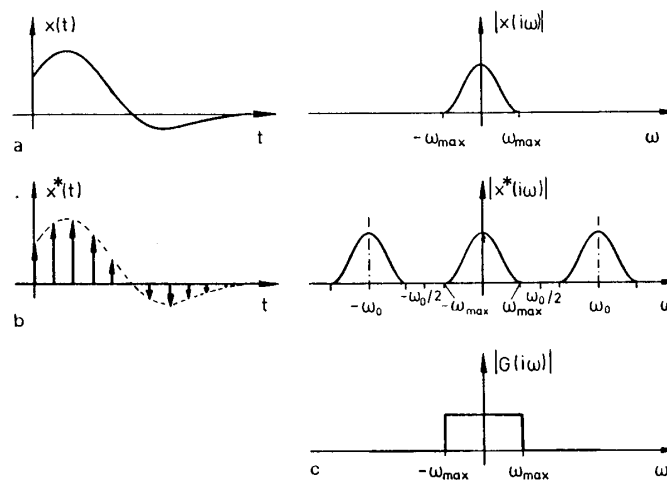
$$T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = A_p w(t)$$

$$\frac{T_1}{T_0} \{x(k) - x(k-1)\} + x(k) = b_0 w(k)$$

$$a_0 x(k) + a_1 x(k-1) = b_0 w(k) . \quad (1.3)$$

1.6. Shannon mintavételezési törvénye

Shannon nevéhez fűződik annak az alapvető törvényszerűségnek a megfogalmazása, hogy egy folytonos jelet milyen gyakorisággal kell mintavételezni ahhoz, hogy a mintavételezett jelsorozatból az eredeti folytonos jel visszaállítható legyen. Feltételezzük, hogy a folytonos jel spektrumában egy maximális körfrekvenciánál nagyobb frekvenciájú komponensek nem fordulnak elő, azaz a jel spektruma *sávhatárolt* (1.5. ábra).



1.5. ábra

A mintavételi körfrekvencia kétszeresen haladja meg a jel spektrumának legnagyobb körfrekvenciájú komponensét:

$$\frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T_0} > \omega_{max}$$

$$\omega_0 > 2\omega_{max}$$

$$T_0 < \frac{\pi}{\omega_{\max}} . \quad (1.4)$$

Shannon (vagy Nyquist) frekvencia definíciója:

$$\omega_{\text{sh}} = \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T_0} . \quad (1.5)$$

2. A z-transzformáció

Definíció: $F(z) = \mathcal{Z}[f_k] \equiv f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots$ vagy $F(z) = \mathcal{Z}[f_k] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$. (2.1)

2.1. Az alapfüggvények z-transzformáltjai

a/ Egységugrás

$$u(kT_0) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}, \text{ így alkalmazva a (2.1) formulát kapjuk, hogy}$$

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}.$$

A mértani sor összege:

$$s_n = a_0 \frac{1}{1-q}, \text{ itt } q = z^{-1} \text{ és } a_0 = 1, \text{ vagyis}$$

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \mathcal{Z}\{u(kT_0)\}. \quad (2.2)$$

b/ Exponenciális függvény

A mintavételezett exponenciális időfüggvény az alábbi:

$$f_k = f(kT_0) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ e^{-k T_0 a} & k \geq 0 \end{cases}$$
$$F(z) = 1 + e^{-a T_0} z^{-1} + e^{-2a T_0} z^{-2} + \dots + e^{-ka T_0} z^{-k}.$$

A mértani sor összege:

$$a_0 = 1$$

$$q = e^{-a T_0} z^{-1}, \text{ így}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT_0)\} = \frac{1}{1 - e^{-a T_0} z^{-1}}. \quad (2.3)$$

2.1. példa. Határozzuk meg az $f(t) = t$ időfüggvény diszkrét alakját és z-transzformáltját!

$$f_k = kT_0$$

$$\mathcal{Z}\{kT_0\} = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = T_0 \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad (2.4)$$

mert :

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{kT_0\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} = z^{-1}T_0 + 2z^{-2}T_0 + \dots + kz^{-k}T_0$$

$$f_k = kT_0 \quad f(t) = t$$

$$\mathcal{Z}\{kT_0\} = \sum_{k=0}^{\infty} (kT_0 z^{-k}) = 0 + T_0 z^{-1} + 2T_0 z^{-2} + 3T_0 z^{-3} + \dots + iT_0 z^{-i} + \dots =$$

$$= T_0 [z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-i} + \dots + z^{-2} + 2z^{-3} + \dots + (i-1)z^{-i} + \dots]$$

$$\text{de } z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-i} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}\{kT_0\} = T_0 \left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-3} + 2z^{-4} + \dots + (i-2)z^{-i} \dots \right],$$

$$\text{de } z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-i} + \dots = \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}\{kT_0\} = \frac{T_0}{(1-z^{-1})} [z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-i} + \dots] = \frac{T_0 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}.$$

2.2. példa. Határozzuk meg az $f_k = r^k$ diszkrét időfüggvény z-transzformáltját!

$$\mathcal{Z}\{r^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (r^{-1}z)^{-k} = \frac{1}{1-rz^{-1}}, \quad (2.5)$$

így

$$\mathcal{Z}\{r^{-k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} (rz)^{-k} = \frac{1}{1-r^{-1}z^{-1}}, \quad (2.6)$$

mert

$$\mathcal{Z}\{r^k\} = 1 + rz^{-1} + r^2 z^{-2} + \dots + r^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (r^{-1}z)^{-k}$$

$$q = rz^{-1}$$

$$F(z) = \frac{1}{1-rz^{-1}}.$$

3. Összefüggés az s- és a z-tartomány között

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

$$z = e^{sT_0} \quad s = \frac{1}{T_0} \ln z \approx \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1} . \quad (3.1)$$

Ez utóbbi formulát nevezzük bilineáris transzformációnak.

3.1. A z-transzformáció tulajdonságai

I. Linearitás :

$$\mathcal{Z}\{\alpha f_k\} = \alpha \mathcal{Z}\{f_k\} = \alpha F(z)$$
$$\mathcal{Z}\{\alpha f_k + \beta g_k\} = \alpha F(z) + \beta G(z).$$

(3.2)

II. Késleltetési törvény: $\mathcal{Z}\{f_{k-1}\} = z^{-1}F(z).$ (3.3)

III. Sietési törvény: $\mathcal{Z}\{f_{k+1}\} = zF(z) - zf_0 .$ (3.4)

IV. Végérték tétel:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) . \quad (3.5)$$

V. Kezdőérték tétel:

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) . \quad (3.6)$$

3.2. Az inverz z-transzformáció

3.2.1. Inverz z-transzformáció a polinomok osztásával

Az inverz z-transzformáció célja, hogy megtaláljuk az amplitúdó értékeket a mintavételi időpontokban. Amennyiben az $F(z)$ komplex függvény két polinom hányadosaként adott, úgy első lépésként át kell azt alakítanunk z^{-1} operátor szerinti függvénnyé. Ezután alkalmazhatjuk a polinomok osztási szabályát, hogy megkapjuk

$F(z) = \mathcal{Z}[f_k] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$ definíció szerinti alakot, ahonnan már kiolvasható a mintavételi időpontokban fellépő amplitúdó érték.

3.1. példa. Transzformáljuk az időtartományba az $F(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - 3z + 4}$ komplex impulzus függvényt!

$$F(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}} \quad \begin{array}{l} (1 + z^{-1}) : (1 - 3z^{-1} + 4z^{-2}) = 1 + 4z^{-1} + 8z^{-2} + \dots \\ 4z^{-1} - 4z^{-2} \\ -4z^{-1} + 12z^{-2} - 16z^{-3} \\ 8z^{-2} - 16z^{-3} \\ -8z^{-2} + 24z^{-3} - 32z^{-4} \\ 8z^{-3} - 32z^{-4} \\ f_0 = 1 \\ f_1 = 4 \\ f_2 = 8 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

3.2.2. Részlet törtre bontás

a/ Valós pólusok esetén:

$$F(z) = \frac{N(z)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)} = \frac{A_1 z}{z - p_1} + \frac{A_2 z}{z - p_2} + \dots \quad / \times \frac{z - p_1}{z}$$

$$A_1 + A_2 \frac{(z - p_1)}{z - p_2} + \dots = \frac{N(z)(z - p_1)}{z(z - p_1) \dots (z - p_n)} = \frac{N(z)}{z(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

$$z = p_1$$

$$A_1 = \frac{N(p_1)}{p_1(p_1 - p_2) \dots (p_1 - p_n)},$$

$$\text{így általánosítva: } A_i = \left. \frac{z - p_i}{z} F(z) \right|_{z = p_i}. \quad (3.7)$$

3.2. példa. Határozzuk meg az alábbi z-transzformált diszkrét időfüggvényét!

$$F(z) = \frac{z^2 + z}{(z - 0,6)(z - 0,8)(z - 1)}$$

$$F(z) = \frac{A_1 z}{z - 0,6} + \frac{A_2 z}{z - 0,8} + \frac{A_3 z}{z - 1}$$

A_1 meghatározása:

$$F(z) \frac{z - 0,6}{z} \Big|_{z=0,6} = \frac{z + 1}{(z - 0,8)(z - 1)} \Big|_{z=0,6} = \frac{1,6}{(-0,2)(-0,4)} = \frac{16}{0,08} = 20.$$

A_2 meghatározása:

$$\frac{z + 1}{(z - 0,6)(z - 1)} \Big|_{z=0,8} = \frac{1,8}{(0,2)(-0,2)} = -\frac{180}{4} = -45.$$

A_3 meghatározása:

$$\frac{z + 1}{(z - 0,6)(z - 0,8)} \Big|_{z=1} = \frac{2}{(0,4)(0,2)} = \frac{200}{8} = 25$$

$$F(z) = \frac{20z}{z - 0,6} - \frac{45z}{z - 0,8} + \frac{25z}{z - 1}$$

$$F(z) = \frac{20}{1 - 0,6z^{-1}} - \frac{45}{1 - 0,8z^{-1}} + \frac{25}{1 - z^{-1}}$$

$$f_k = 20(0,6)^k - 45(0,8)^k + 25.$$

b/ Különböző komplex pólusok esetén kiindulunk a (csillapított) szinusz vagy koszinusz függvény z-transzformáltjából:

$$\mathcal{Z}\{e^{-\alpha k T_0} \cos \gamma k T_0\} = \frac{z^2 - z e^{-\alpha T_0} \cos \gamma T_0}{z^2 - z 2 e^{-\alpha T_0} \cos \gamma T_0 + e^{-2\alpha T_0}}$$

$$\mathcal{Z}\{e^{-\alpha k T_0} \sin \gamma k T_0\} = \frac{z e^{-\alpha T_0} \sin \gamma T_0}{z^2 - z 2 e^{-\alpha T_0} \cos \gamma T_0 + e^{-2\alpha T_0}}$$

$$\mathcal{Z}\{\cos \gamma k T_0\} = \frac{1 - (\cos \gamma T_0) z^{-1}}{1 - (2 \cos \gamma T_0) z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\mathcal{Z}\{\sin \gamma k T_0\} = \frac{(\sin \gamma T_0) z^{-1}}{1 - (2 \cos \gamma T_0) z^{-1} + z^{-2}}$$

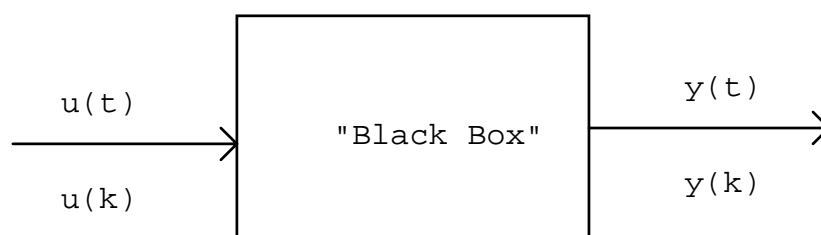
Polár koordináta rendszerbe felírva a komplex pólusokat:

$$\left. \begin{aligned} z_{1,2} &= e^{-\alpha T_0} (\cos \gamma T_0 \pm j \sin \gamma T_0) \\ z_{1,2} &= e^{-\alpha T_0} e^{\pm j \gamma T_0} = R e^{\pm j \Theta}, \text{ ahol } R = e^{-\alpha T_0} \text{ és } \Theta = \gamma T_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\text{Legyen } F(z) = \frac{N(z)}{P(z)(z^2 - 2R\beta z + R^2)} \quad 0 < \beta < 1, \text{ így} \quad (3.9)$$

$$F(z) = \frac{Az^2 + Bz}{z^2 - 2\beta Rz + R^2} + Q(z). \quad (3.10)$$

4. Az impulzus átviteli függvény



4.1. ábra. Egy diszkrét rendszermodell

A rendszer be- és kimenőjele között az alábbi összefüggés írható fel:

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + a_2 y_{k+n-2} + \dots + a_n y_k = b_0 u_{k+n} + \dots + b_n u_k \quad (4.1)$$

Végezzük el az egyenlet z- transzformálását:

$$(z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n) Y(z) = (b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n) U(z)$$

$$H(z) = G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (4.2)$$

4.1. példa. Határozzuk meg az alábbi differencia egyenlettel leírt rendszer impulzus átviteli függvényét! A megoldás a következő:

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - u_k$$

$$(z^2 - 2z + 1)Y(z) = (z - 1)U(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 1}{z^2 - 2z + 1}$$

4.1. Az impulzus átviteli függvény stabilitása

A stabilitás megfogalmazása folytonos esetben:

(jobb oldali pólusok létezése - szemléltetjük a $f(t) = e^{\pm \alpha t}$ függvényvel).

Kiterjesztése az impulzus átviteli függvényre:

$$F(z) = \frac{A}{1 - a_1 z^{-1}}, \text{ ahol } a_1 \text{ valós.} \quad (4.3)$$

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a stabilitás az a_1 faktor függvényében és állapítsuk meg a stabilitás feltételeit!

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = Aa_1^k \quad (4.4)$$

a/ $a_1 < -1$ és $A = 1$ ($a_1 = -2$)

$$\begin{matrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$1 \quad -2 \quad +4 \quad -8 \quad +16 \quad -\dots$$

b/ $a_1 = -1$ és $A = 1$

$$\begin{matrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +\dots$$

c/ $-1 < a_1 < 0$ $a_1 = -0,5$ $A = 1$

$$\begin{matrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$1 \quad -0,5 \quad +0,25 \quad -0,125 \quad +0,0625$$

d/ $0 < a_1 < 1$ $a_1 = 0,5$ $A = 1$

$$\begin{matrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$1 \quad +0,5 \quad +0,25 \quad +0,125 \quad +0,0625$$

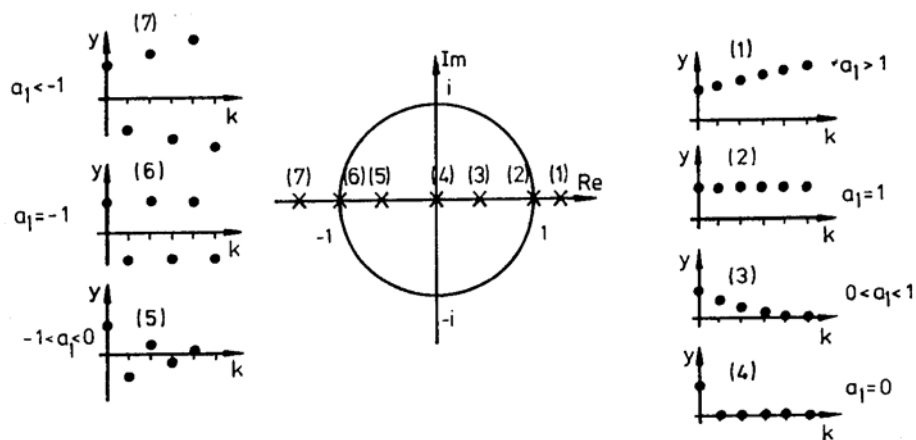
e/ $a_1 = 1$ $A = 1$

$$\begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$1 \quad +1 \quad +1 \quad +\dots$$

f/ $a_1 > 1$ $a_1 = 2$ $A = 1$

$$f_0 = 1, f_1 = 2, f_2 = 4, f_3 = 8, f_4 = 16$$



4.2. ábra. Diszkrét rendszerek stabilitásának szemléltetése

4.2. A frekvencia függvények értelmezése mintavételes rendszereknél

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$U_k = U_0 e^{j\omega k T_0} = U_0 (\cos k\omega T_0 + j \sin k\omega T_0) \quad (4.5)$$

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u_k\} = U_0 \frac{z}{z - e^{j\omega T_0}}, \quad H(z) = \frac{N(z)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n)}$$

$$Y(z) = H(z)U(z) = U_0 \left[\frac{z}{z - e^{j\omega T_0}} \frac{N(z)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_n)} \right] \quad (4.6)$$

$$Y(z) = \frac{A}{1 - e^{j\omega T_0} z^{-1}} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{1 - p_i z^{-1}} \Rightarrow A = U_0 H(e^{j\omega T_0}) \quad (4.7)$$

Állandósult állapotban:

$$Y_{ss}(z) = \frac{U_0 H(e^{j\omega T_0})}{1 - e^{j\omega T_0} z^{-1}} \quad (4.8)$$

$$y_{ss}(k) = U_0 H(e^{j\omega T_0}) e^{j k \omega T_0} \quad (4.9)$$

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_0}} = H(\cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0), \quad (4.10)$$

a dc erősítés (átviteli tényező) meghatározása tehát :

$$A_0 = H(e^{j\omega T_0}) \Big|_{\omega=0} = H(z) \Big|_{z=1} = H(1). \quad (4.11)$$

4.2. példa.

Határozzuk meg a $\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$ átviteli függvény frekvencia karakterisztikáját, ha

$T_0 = 0,1$ s, $a = 1$ rad / s! A megoldás a következő:

$$H(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{1}{1 - e^{-0,1} z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0,905 z^{-1}} = \frac{z}{z - 0,905}$$

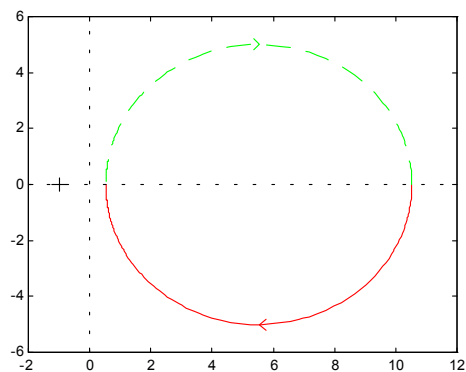
$$H(z = e^{j\omega T_0}) = \frac{e^{j\omega 0,1}}{e^{j\omega 0,1} - 0,905} = \frac{\cos 0,1\omega + j \sin 0,1\omega}{\cos 0,1\omega + j \sin 0,1\omega - 0,905}$$

$$\omega = 0 \text{ vagy } H(z = 1)$$

$$H(z = 1) = \frac{1}{1 - 0,905} \approx 10,53.$$

Az $\omega = 1$ r/s ($a \varphi = -45^\circ$)-hoz tartozó amplitúdó érték meghatározását az alábbiak szerint kell elvégeznünk:

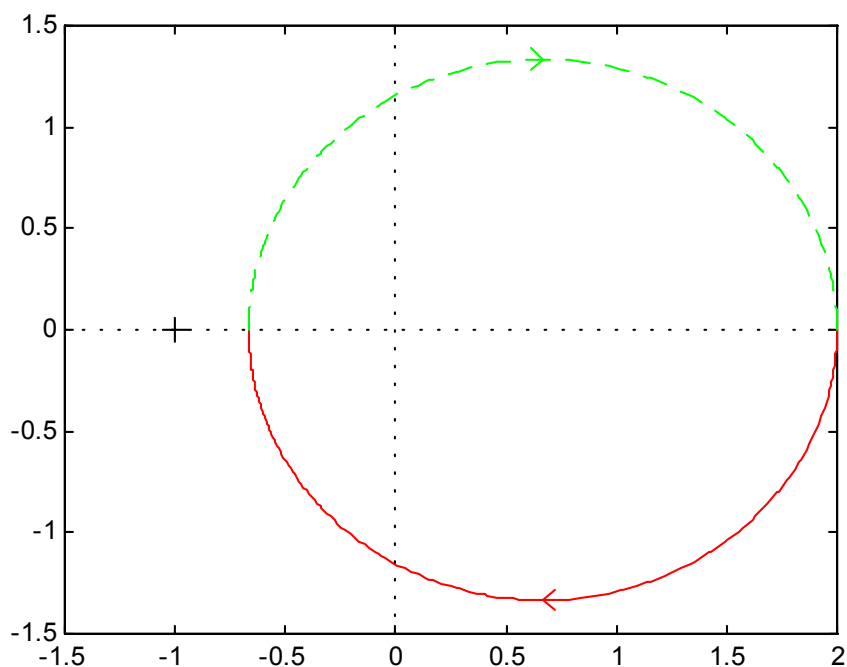
$$\begin{aligned}
 H(z = e^{j\omega T_0}) \Big|_{\omega=1} &= \frac{\cos 0,1 + j \sin 0,1}{\cos 0,1 + j \sin 0,1 - 0,905} = \frac{0,995 + j0,1}{0,995 + j0,1 - 0,905} = \\
 &= \frac{0,995 + 0,1j}{0,09 + 0,1j} \frac{0,09 - 0,1j}{0,09 - 0,1j} = \\
 &= \frac{0,08955 - 0,0995j + 0,009j + 0,01}{0,0081 + 0,01} = \frac{0,09955 - j0,0905}{0,0181} = 5,5 - j5.
 \end{aligned}$$



4.4. ábra. A DNYQUIST MATLAB funkció szemléltetése

4.3.

Példa. Határozzuk meg a $H(z) = \frac{1}{z - 0,5}$ átviteli függvény Nyquist diagramját!



4.5. ábra

4.3. Összefüggés az s-tartománybeli pólusok és a z-tartománybeli pólusok között

a/ Legyen:

$$f = e^{-at} \quad t > 0 \quad F(s) = \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$f_k = e^{-akT_0} \quad t > 0 \quad F(z) = \mathcal{Z}\{e^{-akT_0}\} = \frac{1}{1 - e^{-aT_0}z^{-1}}, \text{ és a pólusok}$$

$$s = -a \quad 1 - e^{-aT_0}z^{-1} = 0 \quad z = e^{-aT_0}.$$

b/ Legyen $f(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$ $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$, ahol a pólusok

$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, valamint

$$\mathcal{Z}\{f_k\} = \frac{z^{-1}e^{-\alpha T_0} \sin(\omega T_0)}{1 - z^{-1}2e^{-\alpha T_0} \cos(\omega T_0) + z^{-2}e^{-2\alpha T_0}}, \text{ s így a diszkrét pólusok}$$

$$z_{1,2} = e^{-\alpha T_0} \left[\cos(\omega T_0) \pm j\sqrt{1 - \cos^2(\omega T_0)} \right]$$

$$z_{1,2} = e^{-\alpha T_0} \left[\cos(\omega T_0) \pm j \sin(\omega T_0) \right]$$

$$z_{1,2} = e^{(-\alpha \pm j\omega)T_0}$$

$$z = e^{sT_0} \quad \text{de} \quad s = \delta + j\omega$$

$$z = e^{(\delta + j\omega)T_0} = e^{\delta T_0} e^{j\omega T_0}$$

$$z = e^{\delta T_0} [\cos(\omega T_0) + j \sin(\omega T_0)].$$

4.4. példa. Határozzuk meg az idő- és a frekvenciatartományban a $H(z)$ rendszer állandósult kimenőjelét, ha a bemenőjel egységugrás!

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2 - 1,4z + 0,48} \quad u(t) = 1(t)$$

$$\text{és } U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})} \frac{z+1}{(z^2 - 1,4z + 0,48)}$$

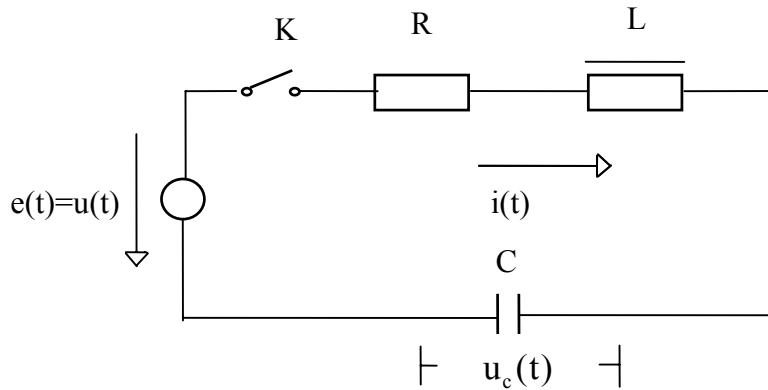
$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{(1-z^{-1})} \frac{(z+1)}{(z^2 - 1,4z + 0,48)}$$

$$y_\infty = \frac{2}{1-1,4+0,48} = \frac{2}{0,08} = \frac{200}{8} = 25$$

Számítsuk ki a dc átviteli tényezőt ($\omega = 0$): $A_0 = H(1) = \frac{2}{0,08} = 25$.

5. Rendszerek leírása az állapotér módszer segítségével

Legyen egy másodrendű tag (ld. az 5.1. ábrát) és írjuk fel a tranziens viselkedést differenciálegyenletekkel, majd vezessünk be fázisváltozókat. Tekintsük kimenőjelnek a kondenzátoron eső feszültséget.



5.1. ábra. Villamos hálózat az állapotér módszer szemléltetésére

Írjuk fel a 5.1. ábrán lévő rendszer differenciálegyenletét a fázisváltozók bevezetésével:

$$U_L = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$U_R = i(t)R$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = C \frac{dy(t)}{dt}$$

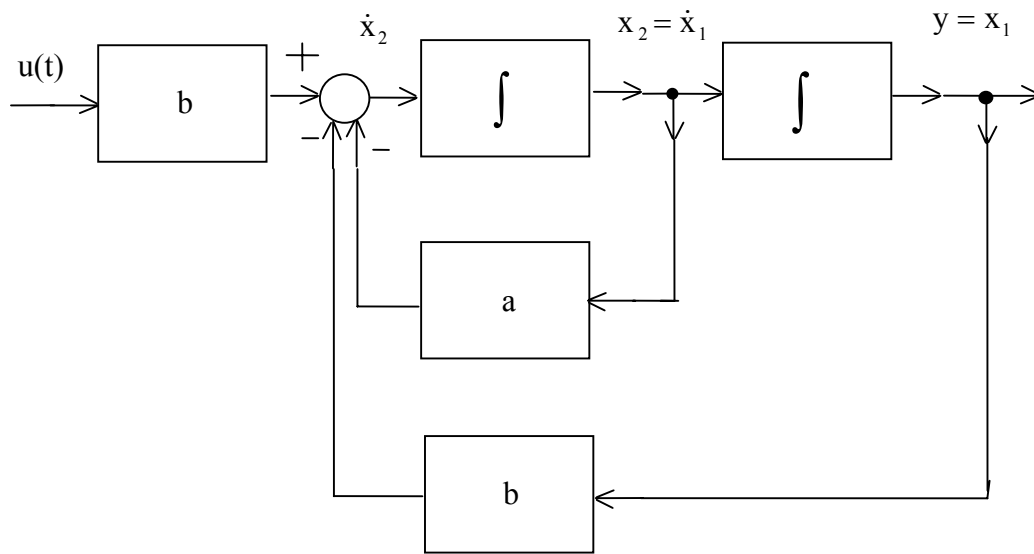
$$\frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = e(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{LC} \iint e(t) dt^2 - \frac{R}{L} \int y(t) dt - \frac{1}{LC} \iint y(t) dt^2$$

$$\frac{1}{LC} = b, \quad a = \frac{R}{L}$$

$$y(t) = b \iint e(t) dt^2 - a \int y(t) dt - b \iint y(t) dt^2 . \quad (5.1)$$



5.2. ábra. Az 5.1. ábrán lévő hálózat állapotteres leírása

Vajon le tudjuk-e írni a rendszert a fázisváltozókkal? Írjuk fel először a definíciós egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(t) \text{ és } y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}u(t),$$

vagyis

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5.2)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t). \quad (5.3)$$

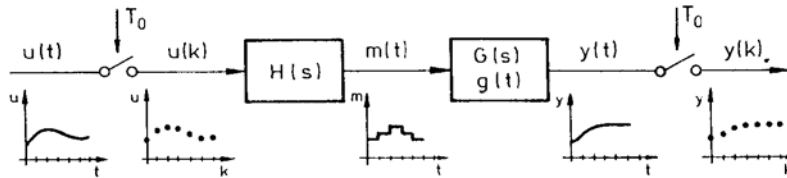
Esetünkben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{0}u(t).$$

6. A diszkrétizált folyamatmodellek meghatározási módjai

Mintavételes rendszereknél a folyamat (a szabályozott szakasz) diszkrét modelljének meghatározásakor a bemeneten zérusrendű tartót (ZOH-t), a kimenetén pedig mintavevőt kell elhelyeznünk (6.1. ábra).



6.1. ábra

6.1. A modell meghatározása az alapfüggvények segítségével

$$G(s) = \frac{1}{1+s} \dots \quad (\text{ld. a 6.1. példát})$$

6.2. ZOH figyelembevételével

$$HG(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} G(s) \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (6.1)$$

6.3. Bilineáris függvény segítségével

$$s \approx \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{mert} \quad s = \frac{1}{T_0} \ln z \approx \frac{2}{T_0} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \dots \right] \quad (6.2)$$

és a trapéz szabály szerinti integrálásból.

6.4. Euler módszerrel

$$s \approx \frac{1}{T_0} (z-1) \quad \text{a téglány szabály szerinti integrálásból.} \quad (6.3)$$

6.1. példa. Hasonlítsuk össze a 6.1. és a 6.2. módszert, ha

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{K'}{a+s} !$$

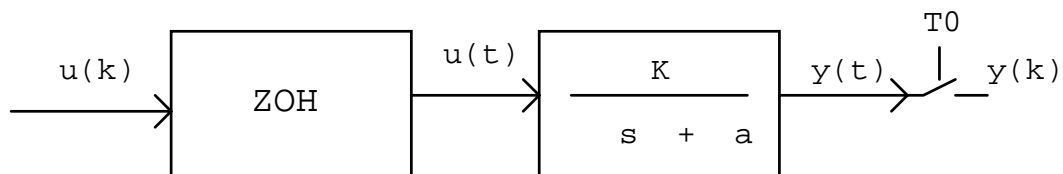
Legyen $K = 1$ és $T = 7,5s$ és $T_0 = 4s$. A megoldás:

$$G_1(z) = \frac{K'}{1 - e^{-aT_0}z^{-1}} = \frac{b_0}{1 + a_1z^{-1}} \text{ és } G_2(z) = \frac{K}{a} \frac{(1 - e^{-aT_0})z^{-1}}{1 - e^{-aT_0}z^{-1}} = \frac{b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1}},$$

ahol $b_1 = 0,4134$ és $a_1 = -0,5866$ és $b_0 = (K/T) = 0,13334$.

$b_0 = 0,1333$	$y_k = b_0u_k - a_1y_{k-1}$	$b_1 = 0,4134$	$y_k = b_1u_{k-1} - a_1y_{k-1}$
$a_1 = -0,5866$		$a_1 = -0,5866$	
u_k	y_k	u_{k-1}	y_k
1	0,1333	0	0
1	0,2666	1	0,4134
1	0,2897	1	0,6559
1	0,3032	1	0,7891

6.2. példa. Határozzuk meg a 6.2. ábra alapján a folyamat diszkrét modelljét!



6.2. ábra

A megoldás a következő:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(s+a)} \right\}$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a)} = \frac{A(s+a) + Bs}{s(s+a)} = \frac{(A+B)s + Aa}{s(s+a)}$$

$$A + B = 0 \quad A = \frac{K}{a}$$

$$Aa = K \quad B = \frac{-K}{a}$$

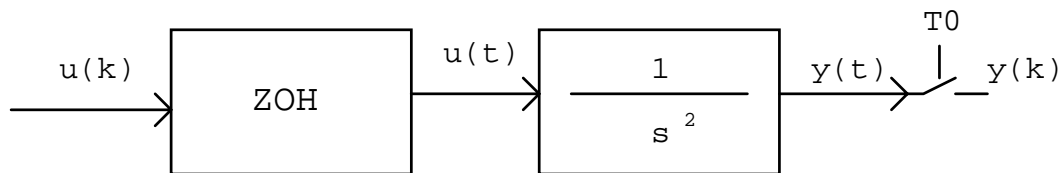
$$G(z) = \frac{K}{a} (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right\} = \frac{K}{a} (1-z^{-1}) \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT_0} z^{-1}} \right\}$$

$$G(z) = \frac{K}{a} \left[1 - \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-aT_0} z^{-1}} \right] = \frac{K}{a} \frac{1-e^{-aT_0} z^{-1} - 1 + z^{-1}}{1-e^{-aT_0} z^{-1}} = \frac{K}{a} \frac{z^{-1}(1-e^{-aT_0})}{(1-e^{-aT_0} z^{-1})}$$

Legyen $T_0 = 0,2$ s és $K = a = 1$ és így

$$G(z) = \frac{0,1813z^{-1}}{1-0,8187z^{-1}}$$

6.3. példa. Határozzuk meg a 6.3. ábra alapján a diszkrét modellt!



6.3. ábra

$$G(z) = \frac{T_0^2}{2} \left[\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^2} \right] \quad (6.4)$$

6.5. Folyamatmodell holtidővel

a/ A tiszta holtidő hatása

$$y(t) = u(t - T_H)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-sT_H}$$

legyen $d = T_H / T_0 = 1, 2, 3, \dots$, akkor

$$Y(z) = z^{-d} U(z)$$

$$G(z) = D(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-d}$$

$$DG(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) z^{-d}$$

(6.5)

b/ A bonyolultabb eset (pontosabb)

Legyen $G(s) = G_1(s)e^{-T_H s}$ és most is fejezzük ki a holtidőt a mintavételi idővel:

$$T_H = mT_0 - fT_0 \quad m \text{ egész és } 0 < f < 1 \text{ s}$$

$$\text{így } G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_1(s)}{s} e^{-sT_H} \right\}, \text{ ahol}$$

$$\left. \begin{aligned} G(s) &= G_1(s) e^{-(mT_0 - fT_0)s} \\ \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_1(s)}{s} e^{-T_H s} \right] &= z^{-m} \left[\frac{A_0 z}{z-1} + \frac{A_1 e^{-p_1 f T_0} z}{z - e^{-p_1 T_0}} + \dots + \frac{A_n e^{-p_n f T_0} z}{z - e^{-p_n T_0}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

6.4. példa. Határozzuk meg a (6.7) folytonos átviteli függvénnyel jellemzett rendszer diszkrét modelljét a megadott mintavételi időt alkalmazva.

$$G(s) = \frac{e^{-2,5s}}{s+1} \quad \text{és } T_0 = 1 \text{ s} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{G(s)}{s} &= \frac{e^{-3s+0,5s}}{s} - \frac{e^{-3s+0,5s}}{s+1} \\ \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} &= z^{-3} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{e^{-0,5} z}{z - e^{-1,0}} \right] \\ \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} &= z^{-3} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{0,6065z}{z - 0,3679} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} &= z^{-3} \frac{z(z - 0,3679) - 0,6065z(z-1)}{(z-1)(z-0,3679)} = \\ &= z^{-3} \frac{z^2 - 0,3679z - 0,6065z^2 + 0,6065z}{(z-1)(z-0,3679)} \end{aligned}$$

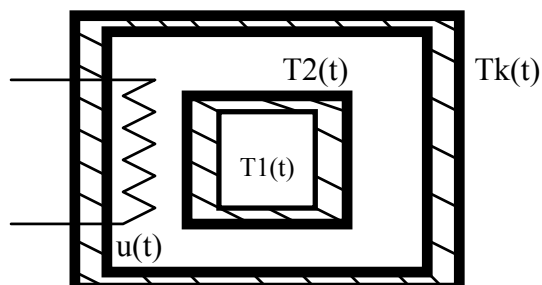
$$\mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = z^{-3} \frac{0,3935z^2 - 0,3679z + 0,6065z}{(z-1)(z-0,3679)}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} z^{-3} \frac{0,3935z^2 - 0,3679z + 0,6065z}{(z-1)(z-0,3679)}$$

$$G(z) = \frac{0,3935z + 0,2386}{z^3(z-0,3679)} = \frac{0,3935(z+0,606)}{z^3(z-0,3679)}$$

7. Diszkrét rendszerek matematikai modellel való leírása

Legyen a következő villamos fűtésű kemence (ld. a 7.1. ábrát) - mint irányított szakasz - matematikai modelljének a meghatározása a feladat.



7.1. ábra

A rendszer dinamikus viselkedését leíró differenciálegyenletek a következők:

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = k_{1,2} (T_2 - T_1)$$

és

$$m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = -k_{1,2} (T_2 - T_1) - k_{2,0} (T_2 - T_k) + u(t)$$

legyen $m_1 c_1 = 0,5$ $m_2 c_2 = 2$
 $k_{1,2} = 1$ és $k_{2,0} = 0,5$

$$\frac{dT_1}{dt} = 2(T_2 - T_1) \quad \frac{dT_1}{dt} = -2T_1 + 2T_2$$

$$\frac{dT_2}{dt} = -0,5(T_2 - T_1) - 0,25(T_2 - T_k) + 0,5u(t)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = 0,5T_1 - 0,75T_2 + 0,25T_k + 0,5u(t).$$

Végezzük el a fenti egyenletek Laplace-transzformálását:

$$sT_1(s) = -2T_1(s) + 2T_2(s) \quad (s+2)T_1(s) - 2T_2(s) = 0$$

$$sT_2(s) = 0,5T_1(s) - 0,75T_2(s) + 0,25T_k(s) + 0,5U(s)$$

$$-0,5T_1(s) + (s+0,75)T_2(s) = 0,25T_k(s) + 0,5U(s)$$

$$\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -0,5 & s+0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25T_k(s) + 0,5U(s) \end{bmatrix}.$$

A melegített test hőmérsékletét keressük $[T_1(s)]$, ezért alkalmazzuk a Cramer szabályt:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \\
 x_k &= \frac{D_k}{D} \quad (k = 1, 2, \dots, n) .
 \end{aligned}$$

D_k : D –ből a k -adik oszlopot b_1, b_2, \dots, b_n oszloppal helyettesítjük s így kapjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{valamint}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} .$$

Fejazzük ki a melegített test hőmérsékletének Laplace-transzformáltját, mint a rendszer kimenőjelét.

$$T_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0,25T_k(s) + 0,5U(s) & s + 0,75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s + 2 & -2 \\ -0,5 & s + 0,75 \end{vmatrix}} = \frac{0,5T_k(s) + U(s)}{(s + 2)(s + 0,75) - 1}$$

$$T_1(s) = \frac{0,5T_k(s)}{s^2 + 2,75s + 0,5} + \frac{U(s)}{s^2 + 2,75s + 0,5}$$

Alakítsuk át az átviteli függvényt ZPK (zérus-pólus-erősítés) alakra. Ennek érdekében megkeressük az átviteli függvény nevezőjének gyökeket az ún. pólusokat.

$$T_1(s+2)(s+0,75) - 1 = s^2 + 0,75s + 2s + 1,5 - 1 = s^2 + 2,75s + 0,5$$

$$s_{1,2} = \frac{-2,75 \pm \sqrt{7,5625 - 2}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-2,75 \pm 2,3585}{2}$$

$$s_1 = -2,554$$

$$s_2 = -0,1957$$

$$G(s) = \frac{T_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+0,1957)(s+2,554)}$$

S végül határozzuk meg a diszkrét modellt zérusrendű tartót feltételezve:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+0,1957)(s+2,554)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0,1957} + \frac{C}{s+2,554}$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{A(s+0,1957)(s+2,554) + Bs(s+2,554) + Cs(s+0,1957)}{s(s+0,1957)(s+2,554)}$$

$$A(s^2 + 2,75s + 0,5) + Bs^2 + 2,554Bs + Cs^2 + 0,1957Cs$$

$$A + B + C = 0 \quad B + C = -2 \quad B = -2 - C$$

$$2,75A + 2,554B + 0,1957C = 0$$

$$2,554B + 0,1957C = -5,5$$

$$0,5A = 1$$

$$A = 2$$

$$-2,554(2 + C) + 0,1957C = -5,5$$

$$-5,108 - 2,35836 = -5,5$$

$$C = 0,1667$$

$$B = -2,1667$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s} - \frac{2,1667}{s+0,1957} + \frac{0,1667}{s+2,554} \quad T_0 = 0,25 \text{ s}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left(\frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{2,1667}{1 - 0,952z^{-1}} + \frac{0,1667}{1 - 0,528z^{-1}} \right).$$

Átrendezve kapjuk, hogy:

$$G(z) = \left\{ 2 - \frac{2,1667(1-z^{-1})}{1-0,952z^{-1}} + \frac{0,1667(1-z^{-1})}{1-0,528z^{-1}} \right\}$$

$$G(z) = \frac{2-1,056z^{-1}-1,904z^{-1}+z^{-2}-2,1667(1-1,528z^{-1}+0,58z^{-2})+0,1667(1-1,952z^{-1}+0,952z^{-2})}{(1-0,952z^{-1})(1-0,528z^{-1})}$$

$$G(z) = \frac{0,025z^{-1}+0,0208z^{-2}}{(1-0,952z^{-1})(1-0,528z^{-1})} = \frac{0,025z^{-1}(1+0,816z^{-1})}{(1-0,952z^{-1})(1-0,528z^{-1})}$$

7.1. Az állapottér módszer a rendszerek leírására, modellezésére

Az állapottér meghatározása az átviteli függvényből. Legyen az átviteli függvény az alábbi alakú:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n + b_{n-1}s^{-1} + \dots + b_1s^{-n+1} + b_0s^{-n}}{a_n + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{-n+1} + a_0s^{-n}} \quad (7.1)$$

Vezessünk be egy új változót, legyen:

$$Z(s) = \frac{(1/a_n)U(s)}{1 + (a_{n-1}/a_n)s^{-1} + \dots + (a_1/a_n)s^{-n+1} + (a_0/a_n)s^{-n}}, \text{ így} \quad (7.2)$$

$$Z(s) = \frac{1}{a_n} U(s) - \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{-1} Z(s) - \dots - \frac{a_1}{a_n} s^{-n+1} Z(s) - \frac{a_0}{a_n} s^{-n} Z(s) \quad (7.3)$$

$$Y(s) = b_n Z(s) + b_{n-1} s^{-1} Z(s) + \dots + b_1 s^{-n+1} Z(s) + b_0 s^{-n} Z(s) \quad (7.4)$$

Legyen az állapotváltozók transzformáltja:

$$X_i(s) = s^{-n+i-1} Z(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.5)$$

inverz Laplace-transzformációval, zérus kezdeti feltétellel kapjuk, hogy

$$z(t) = \frac{1}{a_n} u(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) \text{ és} \quad (7.6)$$

$$y(t) = b_n z(t) + b_{n-1} x_n(t) + \dots + b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t), \quad (7.7)$$

továbbá igaz, hogy

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad \text{és} \quad (7.8)$$

$$\dot{x}_n = z \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (7.9)$$

Az utóbbi három egyenlet alapján:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \frac{1}{a_n}u \quad (7.10)$$

$$y = (b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n})x_1 + (b_1 - a_1 \frac{b_n}{a_n})x_2 + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n})x_n + \frac{b_n}{a_n}u \quad (7.11)$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t) \quad (7.12)$$

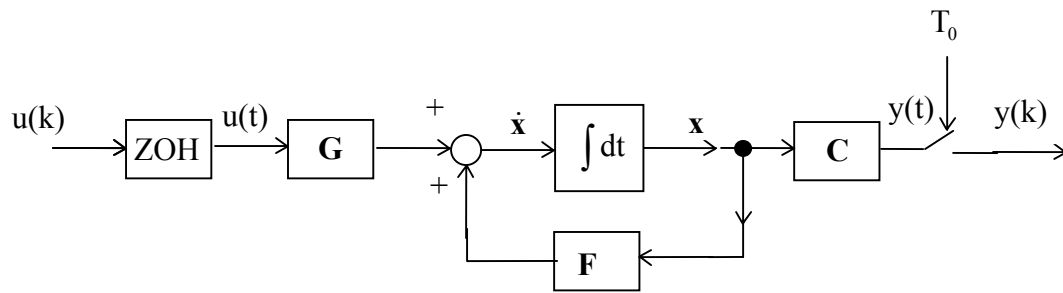
$$y(t) = \left[(b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n}), \dots, (b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n}) \right] \underline{x}(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t). \quad (7.13)$$

Ha $b_n = 0$ (az átviteli függvény szigorúan szabályos), akkor írhatjuk, hogy

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (7.14)$$

$$\mathbf{C}_0^T = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}], \mathbf{D}_0 = 0. \quad (7.15)$$

7.2. Diszkrét modellek állapotteres leírása



7.2. ábra

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

7.1. példa. Határozzuk meg a $G(s)$ átviteli függvénnyel leírt rendszer állapotegyenleteit!

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \ddot{y}(t) = u(t)$$

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

7.2.1. Az állapotegyenlet kiértékelése

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} \text{ (nem gerjesztett rendszer)}$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{F}\mathbf{X}(s)$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{F}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{F}]^{-1} \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{F}]^{-1}\} \mathbf{x}(0) \quad (7.16)$$

7.2.2. Az állapot átmeneti mátrix definíciója

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{F}]^{-1}\}, \text{ így}$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0). \quad (7.17)$$

Gerjesztett rendszerekre:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \\ s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{F}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{X}(s) &= [\mathbf{sI} - \mathbf{F}]^{-1} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{sI} - \mathbf{F}]^{-1} \mathbf{G}\mathbf{U}(s)\end{aligned}$$

A konvolúció tételt felhasználva:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \text{vagy } t_0 \neq 0$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) & y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \\ u(t) &= u(kT_0) & kT_0 < t < (k+1)T_0\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}[(k+1)T_0] = \Phi(T_0)\mathbf{x}(k) + \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} \Phi((k+1)T_0 - \tau)d\tau\mathbf{G}\mathbf{u}(k).$$

Vezessük be az alábbiakat:

$$\begin{aligned}x(kT_0) &= \mathbf{x}(k), \quad u(kT_0) = u(k) \\ (k+1)T_0 - \tau &= \lambda \\ \mathbf{x}(k+1) &= \Phi(T_0)\mathbf{x}(k) + \int_0^{T_0} \Phi(\lambda)d\lambda\mathbf{G}\mathbf{u}(k).\end{aligned}$$

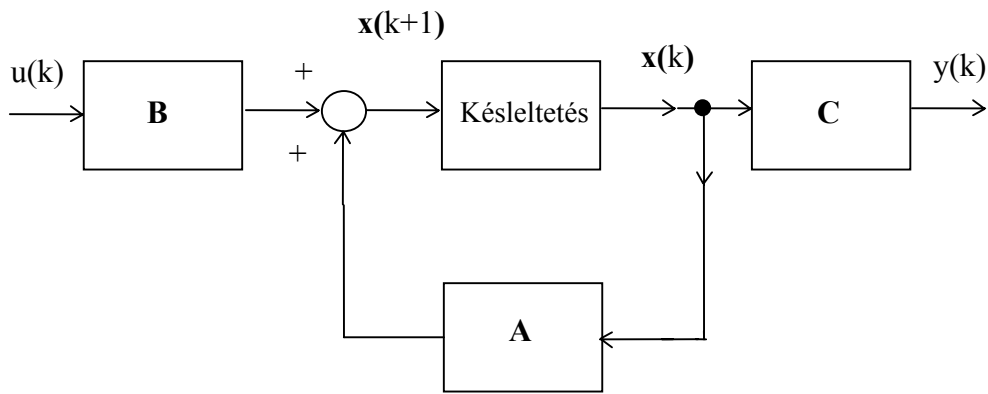
Legyen

$$\mathbf{A} = \Phi(T_0) = \left\{ \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{sI} - \mathbf{F}]^{-1} \right\}_{t=T_0} \quad (7.18)$$

$$\text{és } \mathbf{B} = \int_0^{T_0} \Phi(\lambda)d\lambda\mathbf{G}, \quad (7.19)$$

így írható, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k).\end{aligned} \quad (7.20)$$



7.3. ábra. Diszkrét rendszer leírása állapotér segítségével

7.2. példa. A 7. pontban tárgyalt kemence problémára írjuk fel a diszkrét állapotegyenleteket:

$$x_1 = T_1$$

$$x_2 = T_2$$

$$\frac{dT_1}{dt} = 2(T_2 - T_1)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = -0,5(T_2 - T_1) - 0,25(T_2 - T_k) + 0,5u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_k(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,25 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_k(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & -0,75 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -0,5 & s+0,75 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2,75s + 0,5} \begin{bmatrix} s+0,75 & 2 \\ 0,5 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{0,235}{s+0,1957} + \frac{0,765}{s+2,554} & \frac{0,85}{s+0,1957} - \frac{0,85}{s+2,554} \\ -\frac{0,2125}{s+0,1957} + \frac{0,2125}{s+2,554} & \frac{0,765}{s+0,1957} + \frac{0,235}{s+2,554} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0,235e^{-0,1957t} + 0,765e^{-2,554t} & 0,85(e^{-0,1957t} - e^{-2,554t}) \\ -0,2125(e^{-0,1957t} - e^{-2,554t}) & 0,765e^{-0,1957t} + 0,235e^{-2,554t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(T_0) = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,627 & 0,361 \\ 0,0901 & 0,853 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = 0,5 \int_0^{T_0} \begin{bmatrix} 0,85(e^{-0,1957\lambda} - e^{-2,554\lambda}) \\ 0,765e^{-0,1957\lambda} + 0,235e^{-2,554\lambda} \end{bmatrix} d\lambda$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2,17(e^{-0,1957T_0} - 1) - 0,166(e^{-2,554T_0} - 1) \\ 1,95(e^{-0,1957T_0} - 1) + 0,046(e^{-2,554T_0} - 1) \end{bmatrix}, T_0 = 0,25 \text{ s}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,0251 \\ 0,115 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,627 & 0,361 \\ 0,0901 & 0,853 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0251 \\ 0,115 \end{bmatrix} u(k).$$

7.2.3. Kanonikus alakok

I. Irányíthatóságra vonatkozó kanonikus alak (Controllable Canonical Form):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_m \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

$$\text{ha } G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_m z^{-m}} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m}.$$

II. Megfigyelhetőségre vonatkozó kanonikus alak (Observable Canonical Form):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_m \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \text{ha } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

7.2.4. Holtidős rendszerek leírása állapottérrel

Jelölje a holtidő faktorát $d = \frac{T_H}{T_0} = (1, 2, \dots)$.

Állítsuk fel a késleltetési mátrixokat:

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

$$\mathbf{C}_u^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0],$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}_u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_u^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_u \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{bmatrix}, \text{ vagy tömörebben:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{B}_d u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_d^T \mathbf{x}_d(k). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Ezt részletezve és irányíthatóságra vonatkozó kanonikus formát választva:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & \dots & -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} b_m \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

7.2.5. Irányíthatóság

$$\mathbf{A} \quad \mathbf{Q}_s = [\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{B}] \quad (7.26)$$

mátrixot irányíthatóságra vonatkozó mátrixnak nevezzük.

Ha $\det \mathbf{Q}_s = \det [\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{B}] \neq 0$, akkor a rendszer irányítható és $\text{Rank} \mathbf{Q}_s = m$.

7.3. példa. Határozzuk meg a $G(z)$ diszkrét modellel leírt rendszer állapotegyenleteit kanonikus alakban!

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \end{bmatrix}$$

Irányíthatóság:

$\det \mathbf{Q}_s = \det[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} = -1$. Mivel $\det \mathbf{Q}_s \neq 0$ és $\text{Rank} \mathbf{Q}_s = m = 2$, ezért a rendszer irányítható.

7.2.6. Megfigyelhetőség

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

ahol \mathbf{Q}_B a megfigyelhetőségre vonatkozó mátrix. Ha $\det \mathbf{Q}_B \neq 0$, akkor a rendszer megfigyelhető.

7.4. példa. Határozzuk meg, hogy a $G(z)$ diszkrét impulzus átviteli függvénnyel leírt rendszer megfigyelhető-e!

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C} = b_1$$

A rendszer megfigyelhető, ha $b_1 \neq 0$. Érdekesebb feltételt kapunk, ha 7.3. példát vizsgáljuk a megfigyelhetőség szempontjából:

$$\det \mathbf{Q}_B = \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \\ -b_1 a_2 & (b_2 - a_1 b_1) \end{bmatrix} = b_2^2 + a_2 b_1^2 + a_1 b_1 b_2 \neq 0.$$

7.5. példa. Alkalmazzuk a COOB M fájlt az irányíthatóságra vonatkozó és megfigyelhetőségre vonatkozó kanonikus alakok meghatározására!

Legyen :

$$G(s) = \frac{1}{1+s} e^{-s} \text{ és } sT_0 = 0,5s$$

$$K = 1$$

$$Z = \text{NaN}$$

$$P = -1$$

$$Th = 1s$$

$$G_p(z) = \frac{0,3935}{z^3 - 0,6065z^2}$$

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0,6065 & 1,000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_j^T = \mathbf{C}_c^T = [0,3935 \quad 0 \quad 0]$$

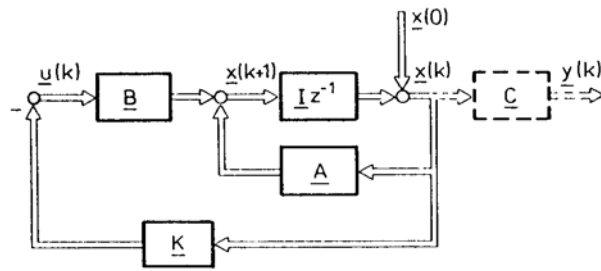
$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0,6065 & 0 & 0,3935 \\ 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c^T = \mathbf{C}_o^T = [0 \quad 1 \quad 0] \quad \mathbf{D} = [0].$$

7.3. Állapot visszacsatolt szabályozások

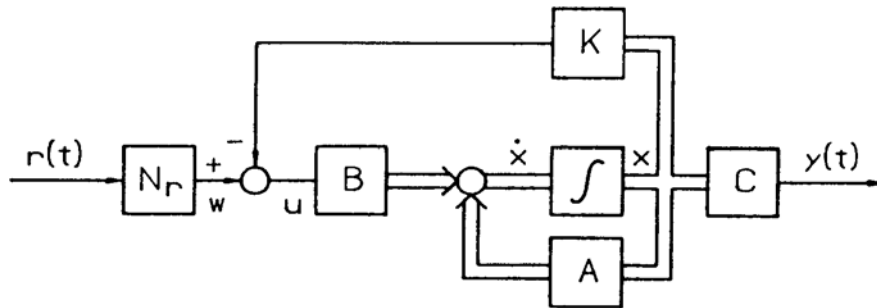
Ez a módszer a szokásos soros vagy visszacsatolós kompenzációs módokkal szemben többlet előnyöket nyújt, bár valamivel bonyolultabb méretezési eljárásokhoz vezet. Mindegyik állapotváltozó visszacsatolásával a hurokátviteli függvény $(n-1)$ számú zérushelye alkalmasan megválasztható és így még önmagában labilis szabályozott szakaszok is biztosan stabilizálhatók, sőt a zárt rendszer válasza még előírt minőségi követelményeknek (túllendülés, csillapítás stb.) is meg tud felelni, mert a zárt rendszer pólusai a \mathbf{k}_i visszacsatolási együtthatók (és K huroktényező) megfelelő megválasztásával kívánság szerint helyezhetők el.



7.4. ábra. Az állapot visszacsatolás elvi vázlata

Az állapot visszacsatolt szabályozások tervezésénél a \mathbf{K} visszacsatoló vektor meghatározása a fő feladat. A visszacsatolás után kapott szabályozási kör rendszermátrixát az $\mathbf{A}_v = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ egyenlet határozza meg.

7.3.1. Alapjel-képzés állapot visszacsatolt rendszereknél



7.5. ábra. Állapot visszacsatolt szabályozás $r(t)$ referencijellel

Folytonos rendszer esetén az N_r referencijel szűrőjének tervezése az alábbi:

$$N_r = \frac{1}{\mathbf{C}(-\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}}. \quad (7.27)$$

Diszkrétre pedig a következő:

$$N_r = \frac{1}{\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}}. \quad (7.28)$$

8. Paraméter optimalizált szabályozások

Az ún. háromparaméteres diszkrét PID algoritmus a sebességalgoritmust valósítja meg. Az analóg szabályozóknál megismert arányos, integráló és differenciáló hatásokat jellemző együtthatók a q_0, q_1, q_2 diszkrét koefficiensek felelnek meg. Ezeket az együtthatókat az ún. paraméteroptimalizálási eljárással határozhatjuk meg. Ennek lényege, hogy az optimalizálás célfüggvényének az összetett, négyzetes integrál kritérium diszkrét alakját tekintjük és valamely ismert, többváltozós szélsőérték-kereső eljárással (szimplex, ROSENBROCK, FLETCHER-POWELL stb.) megkeressük az optimális paramétervektort: $\mathbf{q}^T = [q_0, q_1, \dots, q_n]$.

8.1. A négyzetes integrálkritérium

$$\text{ISEO} = \int_0^{\infty} x_r^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_r^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} x_r(s) x_r(-s) ds \quad (8.1)$$

$$x_r(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (8.2)$$

8.1.2. A polinom-operációs rendszer felépítése

a/ Az utasítás általános alakja

M	K	L1	L2	N
---	---	----	----	---

ahol a jelölések a következők:

műveleti kód (M),
 műveletet módosító kód (K),
 az első operandus címe (L1),
 a második operandus címe (L2),
 az eredmény címe (N).

b/ Operandusok: T(Li) tároló helye, ahol $i_{\max} = 5$

P(Li) polinom tároló helye, ahol $i_{\max} = 5$.

c / Műveletek:

- 1 (+) összeadás → algebrai művelet
- 2 (-) kivonás → algebrai művelet
- 3 (x) szorzás → algebrai művelet
- 4 (→) átvitel → operandus mozgatása.

d / A K művelet módosító kód jelentése

K	Ha a műveleti kód algebrai műveletet jelöl ki	Ha a műveleti kód átvitelt jelöl ki
1	$T(L1) \leftrightarrow T(L2)$	$T(L1) \rightarrow T(N)$
2	$T(L1) \leftrightarrow P(L2)$	$T(L1) \rightarrow APOL$
3	$P(L1) \leftrightarrow T(L2)$	$P(L1) \rightarrow T(N)$
4	$P(L1) \leftrightarrow P(L2)$	$T(L1) \rightarrow BPOL$
5*	-	$T(L1) \rightarrow CPOL$

* **Megjegyzés:** csak digitális szabályozásokhoz, mert ilyenkor a kritériumok a következők:

$$a / S_e = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M e^2(k)} \quad (8.3)$$

$$b / S_u = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M \Delta u^2(k)} \quad (8.4)$$

$$c / S_{krit}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} + \frac{C(z)}{A(z)}. \quad (8.5)$$

Az a/ és b/ kritériumokat algoritmus szerint - *formálisan* - a c/ kritériumba olvastottuk össze.

8.1.3. Szabályozástechnikai algoritmusok

I. Analóg:

$$PI \ Y_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_I}\right) = \frac{s + \beta}{s\alpha} \quad (8.6)$$

$$I \ Y_c(s) = \frac{1}{sT_I} = \frac{\beta}{s} \quad (8.7)$$

$$PD \ Y_c(s) = K_p \frac{1 + sT_I}{1 + sT_2} \Big|_{T_2=0,1T_1} = K_p \frac{1 + sT_I}{1 + 0,1sT_1} = K_p \frac{s + \delta}{0,1s + \delta} \quad (8.8)$$

$$PID \ Y_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + 0,1sT_D}\right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta + s}{s} + \frac{s}{\gamma + 0,1s}\right). \quad (8.9)$$

II. Digitális:

$$G_c(z) = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{q_0z^2 + q_1z + q_2}{z^2 - z} \quad (PID) \quad (8.10)$$

$$G_c(z) = \frac{q_0 + q_1z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{q_0z + q_1}{z - 1} \quad (PI), \quad (8.11)$$

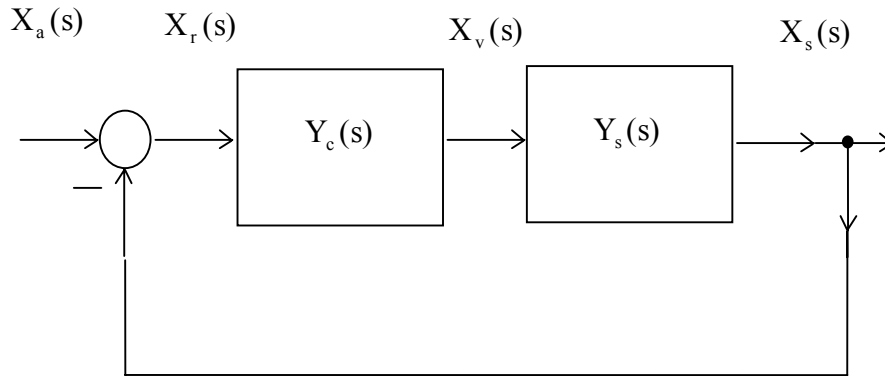
$$\text{ahol } K_p = q_0 - q_2 \quad (8.12)$$

$$C_D = q_2 / K_p \quad \text{és} \quad C_D = \frac{T_D}{T_0}, \quad C_I = \frac{T_0}{T_I} \quad (8.13)$$

$$C_I = (q_0 + q_1 + q_2) / K_p. \quad (8.14)$$

8.2. Példák paraméter optimalizált szabályozás tervezésére

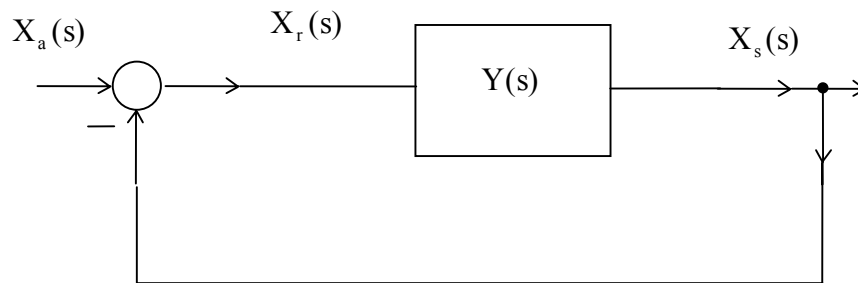
8.2.1. Analóg szabályozási kör



8.1. ábra. Mereven visszacsatolt analóg szabályozási kör

$$Y_c(s) = K_c \frac{s + \delta}{0,1s + \delta}$$

$$Y_s(s) = \frac{1}{s(1 + 0,6s + 0,05s^2)}$$



8.2. ábra. A 8.1. ábrán lévő rendszer egyszerűsítése

Határozzuk meg a hibajel kifejezését, ha az alapjel egységugrás!

$$X_a(s) = \frac{1}{s}$$

$$X_r(s) = X_a(s) - X_r(s)Y(s)$$

$$X_r(s) = \frac{X_a(s)}{1 + Y(s)} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + K_p \frac{(s + \delta)}{(0,1s + \delta)} \frac{1}{s(1 + 0,6s + 0,05s^2)}}$$

$$X_r(s) = \frac{1}{s} \frac{s(0,1s + \delta)(1 + 0,6s + 0,05s^2)}{s(0,1s + \delta)(1 + 0,6s + 0,05s^2) + K_p(s + \delta)}$$

$$X_r(s) = \frac{(0,1s + \delta)(1 + 0,6s + 0,05s^2)}{s(0,1s + \delta)(1 + 0,6s + 0,05s^2) + K_p(s + \delta)}$$

Bontsuk a hibajelet leíró összefüggést polinomokra és határozzuk meg a műveleti mátrixot:

$$s \equiv P(1)$$

$$\delta \equiv P(2)$$

$$K_p \equiv P(3)$$

$$0,1s \equiv P(4)$$

$$1 + 0,6s + 0,05s^2 \equiv P(5)$$

$$X_r(s) = \frac{\{P(4) + P(2)\} P(5)}{P(3) \{P(1) + P(2)\} + P(1) \{P(4) + P(2)\} P(5)}$$

$$T(1) = P(4) + P(2)$$

$$BPOL = \{P(4) + P(2)\} P(5)$$

$$T(3) = \{P(4) + P(2)\} P(5) P(1)$$

$$APOL = P(1) \{P(4) + P(2)\} P(5) + P(3) \{P(1) + P(2)\}.$$

A műveletek száma: 8.
 A polinomok száma: 5.
 A maximális rendűség: 2.
 Az optimálandó paraméterek száma: 2.

Így a műveleti mátrix a következő:

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0. \end{matrix}$$

A kezdőértékek meghatározása Bode-diagram alapján történik, így

$$K^* = 12$$

$$\delta^* = 3 \text{ rad / s.}$$

A PISCO program segítségével meghatározott optimális paraméterek:

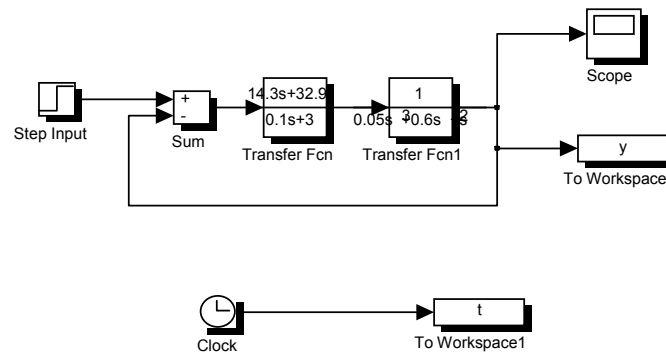
$$K_{\text{opt}} = 14,13$$

$$\delta_{\text{opt}} = 2,797 \text{ rad/s.}$$

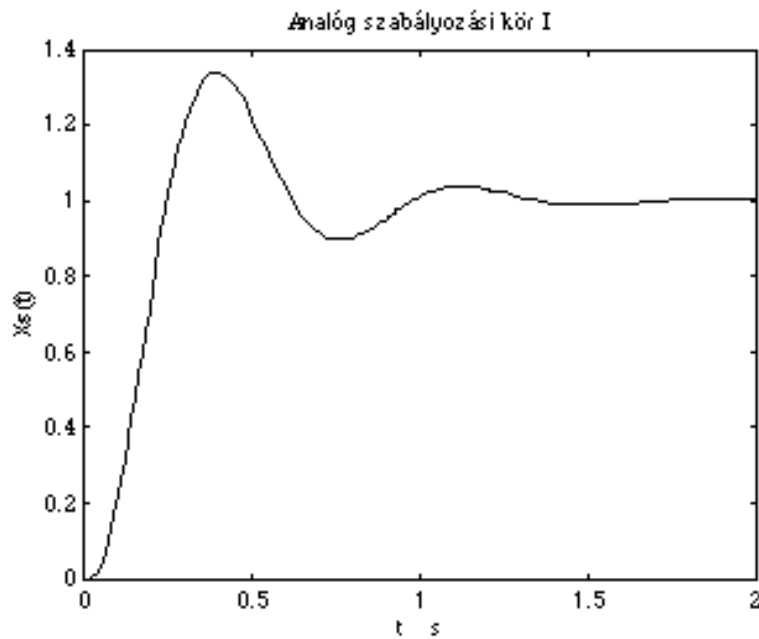
A zárt kör szimulációját a SIMULINK programmal elvégezve a minőségi jellemzőkre a következőket kapjuk.

$$v_{\text{max}} = 43,57\%$$

$$t_s \approx 1,5451 \text{ s.}$$



8.3. ábra. Az analóg szabályozási kör szimulációs blokk-diagramja



8.4. ábra. A szabályozási kör szimulációjának eredménye

8.2.2. Paraméter optimalizált digitális szabályozások tervezése

Digitális szabályozó tervezésének összefüggései és a szimulációs modellek jellemzői:

$$G_c(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (8.15)$$

$$G_c(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)} = \frac{Q(z)}{zP(z)}. \quad (8.16)$$

A szabályozott szakasz átviteli függvénye:

$$Y_s(s) = \frac{K(1 - T_1 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \quad (8.17)$$

ahol

$$K = 1, \quad T_1 = 4 \text{ s}, \quad T_2 = 10 \text{ s}.$$

A szabályozott szakasz diszkrét modellje:

$$G_p(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (8.18)$$

Holtidős szabályozott szakasz folytonos modellje:

$$Y_s(s) = \frac{K(1 + T_4 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)} e^{-T_H s} \quad (8.19)$$

$$K = 1, T_1 = 10 \text{ s}, T_2 = 7 \text{ s}, T_3 = 3 \text{ s}, T_4 = 2 \text{ s}, T_H = 4 \text{ s}.$$

Holtidős szabályozott szakasz diszkrét modellje:

$$G_p(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (8.20)$$

$$e(z) = w(z) - y(z) \quad (8.21)$$

$$w(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{z}{P(z)} \quad (8.22)$$

$$y(z) = e(z)G_R(z)G_P(z)$$

$$e(z) = w(z) - e(z)G_R(z)G_P(z)$$

$$e(z) = \frac{w(z)}{1 + G_R(z)G_P(z)} \quad (8.23)$$

$$u(z) = \frac{G_R(z)w(z)}{1 + G_R(z)G_p(z)} \quad (8.24)$$

$$S_{eu} = \frac{1 + rK_p^2 G_R(z)}{1 + G_R(z)G_p(z)} w(z) \quad (8.25)$$

$$S_{eu} = \frac{P(z)z\langle zA(z) \rangle + rK_p^2 Q(z)\langle zA(z) \rangle}{P(z)[P(z)\langle z(A(z)) \rangle + Q(z)B(z)]} \quad (8.26)$$

$z A(z)$ az első, $Q(z)$ a második, $B(z)$ a harmadik, $P(z)$ a negyedik és végül z az ötödik polinomot jelenti, amennyiben az optimalizálás az időtartományban történik. A frekvenciatartományban a célfüggvényt leíró egyenletek módosulnak.

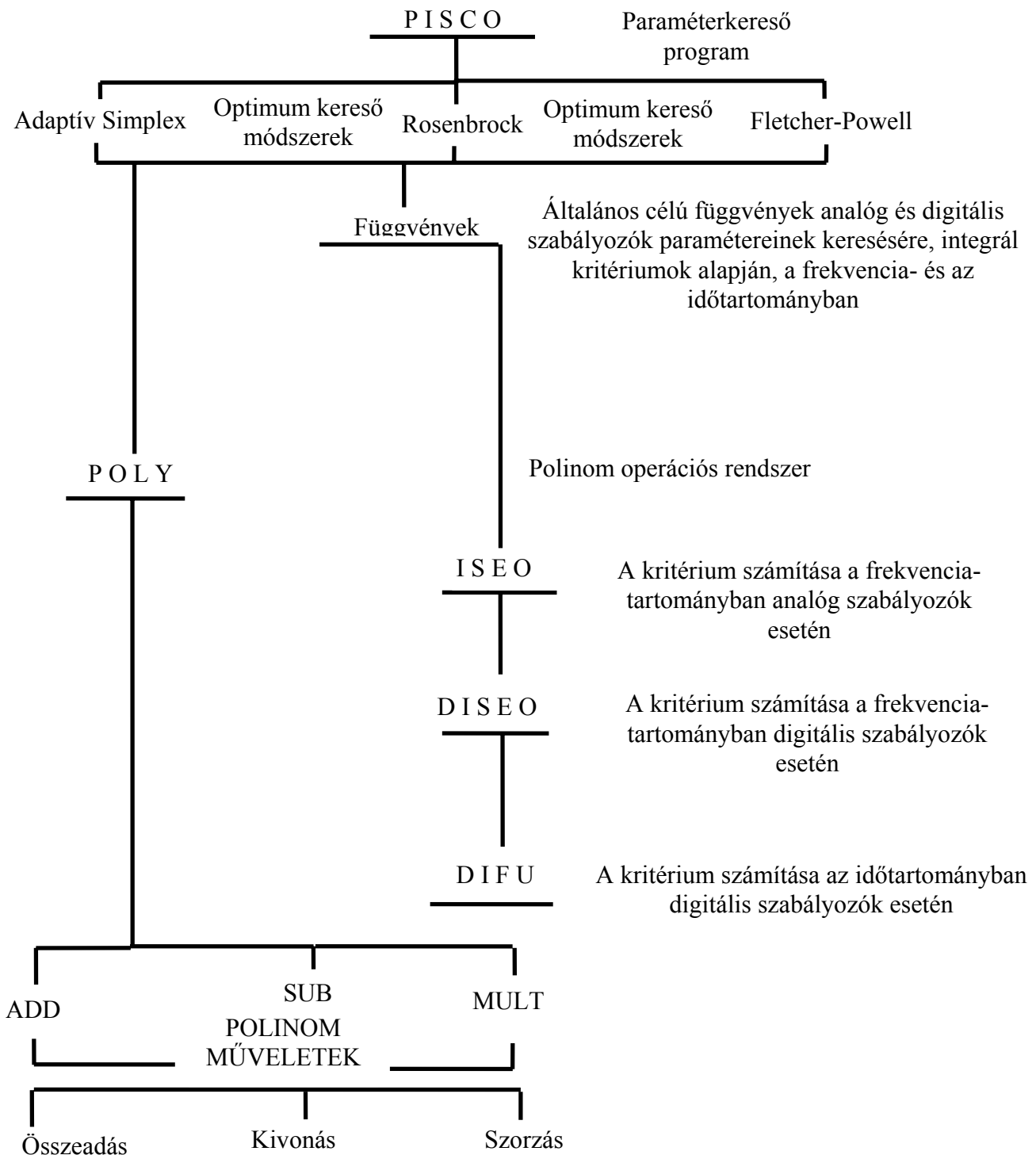
$$\Delta u(z) = (1 - z^{-1})u(z) = \frac{G_R(z)}{1 + G_R(z)G_p(z)} \quad (8.27)$$

$$S_{eu} = \frac{z^2 A(z) + rK_p^2 A(z)Q(z)}{P(z)zA(z) + B(z)Q(z)}, \quad (8.28)$$

ahol $z^2 A(z)$ az első, $P(z) z A(z)$ a második, $A(z)$ a harmadik, $Q(z)$ a negyedik és végül $B(z)$ az ötödik polinomot jelenti. Tehát a célfüggvényt formálisan polinomokkal írhatjuk le:

$$S_{eu} = \sum_{k=0}^M [e^2(k) + rK_p^2 \Delta u^2(k)] = \frac{BPOL + rK_p^2 CPOL}{APOL} \quad (8.29)$$

8.2.3. A PISCO program felépítése



A második szimulációhoz használt folyamatmodell átviteli függvénye a következő:

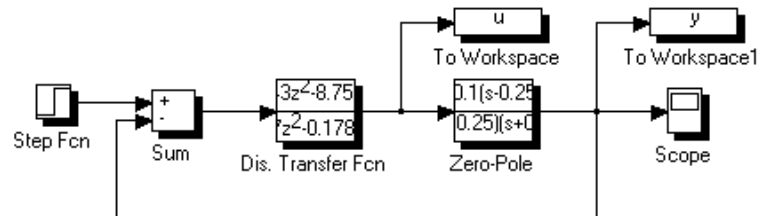
$$Y_s(s) = \frac{K(1 + T_4s)}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)} e^{-T_Hs}$$

8.2.4. Az optimalizálást elvégző program adatbázisának felépítése

9	a műveletek száma
5	a polinomok száma
5	a polinomok maximális rendűsége
3	az optimalizált paraméterek száma
0	képernyő kiíratási flag
3	a műveleti mátrix kezdete
4	
4	
1	
1	
3	
4	
2	
3	
2	
1	
1	
1	
2	
3	
3	
3	
4	
3	
4	
4	
4	
2	
4	
0	
0	
3	
3	
5	
1	
2	
4	
4	
2	
0	
0	
3	
4	
2	
1	
3	
4	
5	

3	
0	
0	a műveleti mátrix vége
5	az első polinom rendősége
2	a második polinom
rendősége	
2	a harmadik polinom
rendősége	
1	a negyedik polinom
rendősége	
1	az ötödik polinom
rendősége	
0.0000000000000000E+000	az első polinom nulladrendű együtthatója
0.0000000000000000E+000	
-9.9780000000000000E-002	
7.0409000000000000E-001	
-1.4986300000000000	
1.0000000000000000	az első polinom ötödfokú együtthatója
3.0300000000000000	
-7.1500000000000000	a második polinom nulladrendű együtthatója
4.5490000000000000	a második polinom vége
-7.5000000000000000E-003	a harmadik polinom kezdete
4.7930000000000000E-002	
6.5250000000000000E-002	a harmadik polinom vége
-1.0000000000000000	a negyedik polinom kezdete
1.0000000000000000	a negyedik polinom vége
0.0000000000000000E+000	az ötödik polinom kezdete
1.0000000000000000	az ötödik polinom vége
3.0500000000000000	az első keresett paraméter indulási pontja
-7.163999881744385	a második keresett paraméter indulási pontja
4.532000017166138	a harmadik keresett paraméter indulási pontja
1.000000047497451E-003	keresési lépésköz az első paraméterre
4.999999888241291E-003	keresési lépésköz a második paraméterre
1.000000047497451E-003	keresési lépésköz a harmadik paraméterre
9.999999974752427E-007	pontossági érték az első paraméterre
9.999999974752427E-007	pontossági érték a második paraméterre
9.999999974752427E-007	pontossági érték a harmadik paraméterre
2	az első keresett paraméter a második polinomban van
0	az első paraméter a második polinom nulladrendű
együtthatója	
2	a második keresett paraméter a második polinomban van
1	a második paraméter a második polinom elsőrendű
együtthatója	
2	a harmadik keresett paraméter a második polinomban van
2	a harmadik paraméter a második polinom másodrendű
együtthatója	

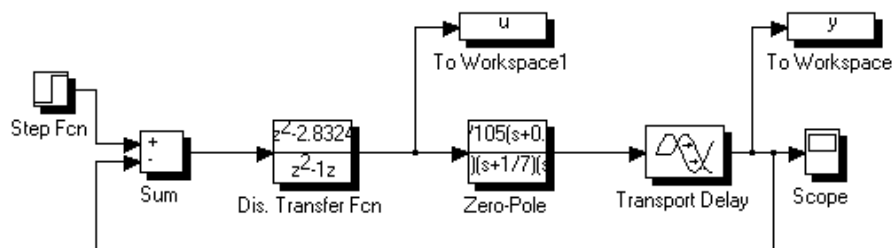
T	digitális szabályozási probléma
2.5000000000000000E-001	a súlyozó faktor értéke
T	vizsgálat az időtartományban
2	az integrálkritérium típusa
1.0000000000000000	az állandósult érték



8.5. ábra. Holtidő nélküli szabályozott szakasszal felépített digitális szabályozási kör szimulációs tömbvázlata

Az első szabályozási problémánál használt folyamat átviteli függvénye és folyamat ábrája (8.5. ábra) SIMULINK alatt:

$$Y_s(s) = \frac{K(1 - T_1s)}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}$$



8.6. ábra. Holtidős szakasszal felépített szabályozási kör szimulációs blokk-diagramja

A második szabályozási problémánál használt folyamat átviteli függvénye és folyamat ábrája SIMULINK alatt (ld. a 8.6. ábrát):

$$Y_s(s) = \frac{K(1 + T_4s)}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)} e^{-T_H s}$$

$$G_c(z) = \frac{Q(z)}{zP(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)} \quad P(z) = z-1$$

$$G_p(z) = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$T_0 = 4 \text{ s és } T_H = 4 \text{ s,}$$

$$zA(z) \equiv P(1)$$

$$Q(z) \equiv P(2)$$

$$B(z) \equiv P(3)$$

$$P(z) \equiv P(4)$$

$$z \equiv P(5)$$

$$S_{eu} = \frac{P(z)z(zA(z)) + rK_p^2 Q(z)(zA(z))}{P(z)[P(z)(zA(z)) + Q(z)B(z)]}$$

3	4	4	1	1	P(z)(zA(z))
3	4	2	3	2	Q(z)B(z)
1	1	1	2	3	P(z)(zA(z)) + Q(z)B(z)
3	3	4	3	4	P(z)[P(z)(zA(z)) + Q(z)B(z)]
4	2	4	0	0	APOL
3	3	5	1	2	P(z)z(zA(z))
4	4	2	0	0	BPOL
3	4	2	1	3	Q(z)(zA(z))
4	5	3	0	0	CPOL.

8.2.5. Az optimális paraméterek inicializálási értékeinek meghatározása Bode-diagram segítségével

a/ Az első közelítés:

$$T_1 = 50 \text{ s}$$

$$K_p = 3 \quad Y_c(s) = 3\left(1 + \frac{1}{50s}\right)$$

$$T_D = \frac{T_1}{10} = 5 \text{ s}$$

$$Y_c(s) = 6\left(1 + \frac{1}{50s} + 5s\right).$$

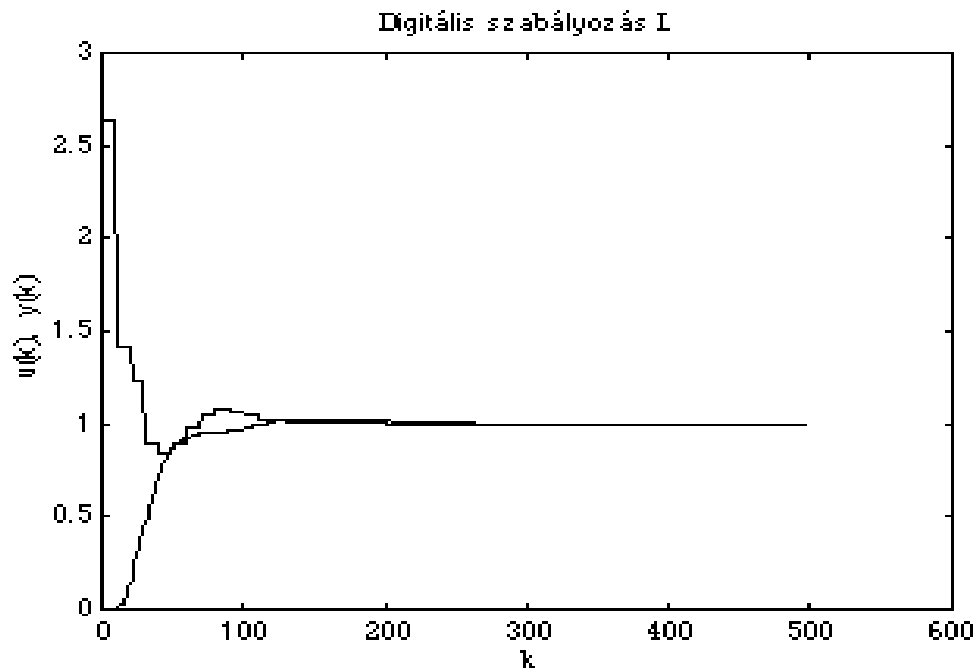
b/ A második közelítés a fázis- és amplitúdó-tartalék növelésével:

$$Y_c(s) = 2.5\left(1 + \frac{1}{50s} + 5s\right)$$

$$\varphi_t > 30^\circ$$

$$a_t > 4 \text{ dB.}$$

c/ Az analóg PID paraméterek diszkretizálása és az optimalizálás kiindulási pontjának megadása:



8.7. ábra. A digitális szabályozási kör szimulációjának eredménye

$$q_0 = K_p \left(1 + \frac{T_D}{T_0}\right)$$

$$q_1 = -K_p \left(1 + 2\frac{T_D}{T_0} - \frac{T_0}{T_I}\right)$$

$$q_2 = K_p \frac{T_D}{T_0}$$

A kiindulási paraméterek:

$$q_0^* = 5$$

$$q_1^* = -7,5$$

$$q_2^* = 3.$$

Az optimalizálás eredményei:

- az első közelítés

$$q_0^{**} = 4,6567$$

$$q_1^{**} = -7,6467$$

$$q_2^{**} = 3,3853,$$

- a második közelítés (a pontosság vektorának változtatása)

$$q_0 = 4,241$$

$$q_1 = -6,8131$$

$$q_2 = 2,931,$$

- a harmadik közelítés a súlyfaktor megváltoztatásával

$$r = 0,1$$

$$q_2 = 1,48355$$

$$q_1 = -3,858$$

$$q_0 = 2,636.$$

8.2.6. Példa holtidős, analóg szabályozás paraméter optimalizálására

Legyen a szabályozott szakasz holtidős és kéttárolós, az analóg szabályozó tiszta integráló jellegű. Az optimalizálás végrehajtásánál problémát jelent, hogy a célfüggvényt polinom-polinom alakban kell megadni. Ezért a holtidőt negyedfokú PADE-approximációval képezzük le:

$$Y_s(s) = \frac{e^{-2s}}{(1+2s)(1+4s)} = \frac{e^{-2s}}{1+6s+8s^2} \quad \text{é s} \quad (8.30)$$

$$Y_c(s) = \frac{1}{sT_I} = \frac{\beta}{s}. \quad (8.31)$$

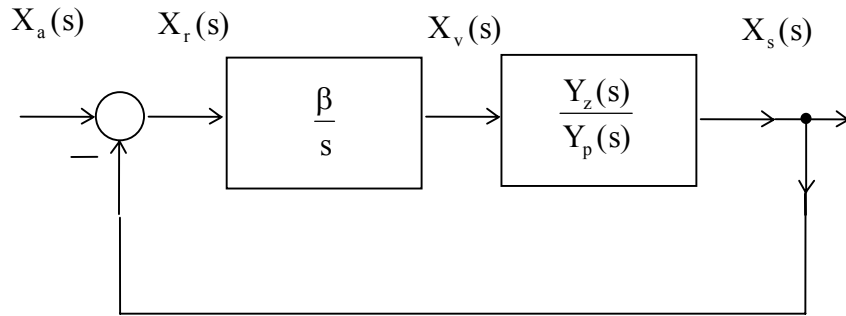
Felhasználjuk a CONTROL SYSTEM TOOLBOX *pade* függvényét és a következő közelítést kapjuk normalizálás után:

$$e^{-2s} \approx \frac{9,524 \cdot 10^{-3} s^4 - 0,09524 s^3 + 0,4286 s^2 - s + 1}{1 + s + 0,42857 s^2 + 0,09524 s^3 + 9,524 \cdot 10^{-3} s^4}$$

$$Y_s(s) = \frac{1 - s + 0,4286 s^2 - 0,09524 s^3 + 0,009524 s^4}{1 + 7s + 14,4286 s^2 + 10,6668 s^3 + 4,0098 s^4 + 0,8191 s^5 + 0,07619 s^6}.$$

Így a rendszert az alábbi egyszerűsített tömbvázlattal írhatjuk le (ld. a 8.8. ábrát). A rendszeregyenletek meghatározása a következő:

$$Y_s(s) = \frac{Y_z(s)}{Y_p(s)}$$



8.8. ábra. Holtidős szakasszal felépített analóg szabályozási kör tömbvázlata

$$Y_s(s) = \frac{Y_z(s)}{Y_p(s)}$$

$$\frac{1}{s} - X_r(s) \frac{\beta Y_z(s)}{s Y_p(s)} = X_r(s) \quad X_r(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{\beta Y_z(s)}{s Y_p(s)}}$$

A rendszeregyenletek kifejezése polinomok segítségével:

$$\frac{1}{s} = X_r(s) \left[1 + \frac{\beta Y_z(s)}{s Y_p(s)} \right] \quad X_r(s) = \frac{1}{s} \frac{s Y_p(s)}{s Y_p(s) + \beta Y_z(s)}$$

$$X_r(s) = \frac{Y_p(s)}{s Y_p(s) + \beta Y_z(s)} \quad (8.32)$$

A polinomok kiosztása a számítógépes eljárásnak megfelelően:

$$Y_p(s) \rightarrow P_1$$

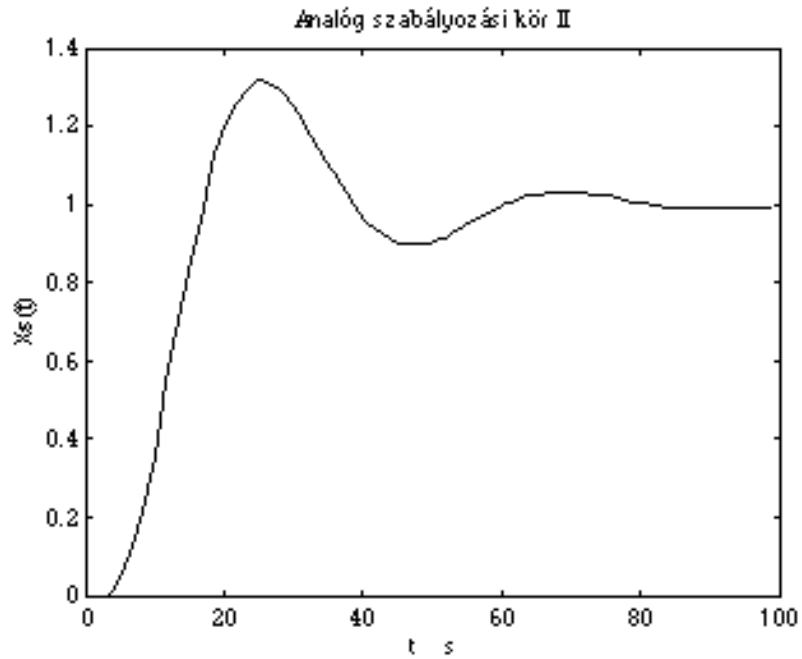
$$s \rightarrow P_2$$

$$\beta \rightarrow P_3$$

$$Y_z \rightarrow P_4$$

A műveleti mátrix, a kiindulási (kezdő) pont meghatározása és az optimált paraméter megadása:

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{matrix}$$



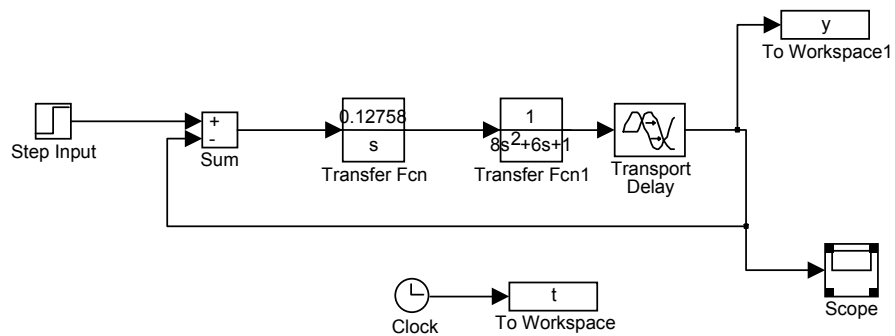
8.10. ábra. A holtidős analóg szabályozási kör szimulációjának eredménye

A kezdőpont:

$$\beta = 0,25 \text{ rad/s}$$

$$\beta_{\text{opt}} = 0,12758 \text{ rad/s}$$

$$\text{ISEO} = 10,26464.$$



8.9. ábra. A holtidős szabályozott szakasszal felépülő analóg kör szimulációs blokk-diagramja

9. Adatok analízise a MATLAB rendszerben

9.1. Oszlop orientált analízis

Legyen egy **A** mátrix és legyenek a következő feladatok:

a/ alkossunk egy háromelemű vektort a mátrix legnagyobb abszolút értékű elemeiből,

b/ határozzuk meg az oszlopvektorok elemeinek átlagát,

c/ rendezzük a mátrixot oszlopok szerint.

A megoldás:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$- m = \max(\mathbf{A}) \Rightarrow m = [9 \ 8 \ 7],$$

$$- mv = \text{mean}(\mathbf{A}) \Rightarrow mv = [4,333 \ 5,333 \ 5,333] \text{ (oszlopvektorok elemeinek átlaga),}$$

$$- s = \text{sort}(\mathbf{A}) \Rightarrow s = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ rendezés oszlop szerint.}$$

9.2. A NaN-ok kezelése (Not a Number) a MATLAB-ban

Legyen $x = [1 \ 0/0 \ 23]$, akkor i megadja a helyét a NaN-nak:

$$i = \text{find}(\text{isnan}(x)) \quad (i=2).$$

A NaN törlése:

$$a/ \ x = x(\text{find}(\sim \text{isnan}(x)))$$

$$b/ \ x = x(\sim \text{isnan}(x))$$

$$c/ \ x(\text{isnan}(x)) = []; \text{ ahol } x = [1 \ 2].$$

9.3. Az FFT bemutatása a MATLAB segítségével

9.1. példa. A Fourier transzformáció szemléltetése a Signal Processing Toolbox alkalmazásával.

A transzformálandó jel előállítása:

```

t = 0:0.001:1 ,
y = sin(2*pi*50*t) + 2*sin(2*pi*120*t) ,
rand('normal')
y_n = y + 0,5* rand(t) ,
y_n = fft(y_n,1024).

```

A teljesítmény-sűrűség spektrum előállítás:

```

n = length(y_n) ,
P_yy = y_n * conj(y_n) / n ,

f = 500 * (0:512) / 512 ,
P_yy(514:1024) = [ ] ,
P_yy(2:512) = 2 * P_yy(2:512) ,
Semilogy(f, P_yy) .

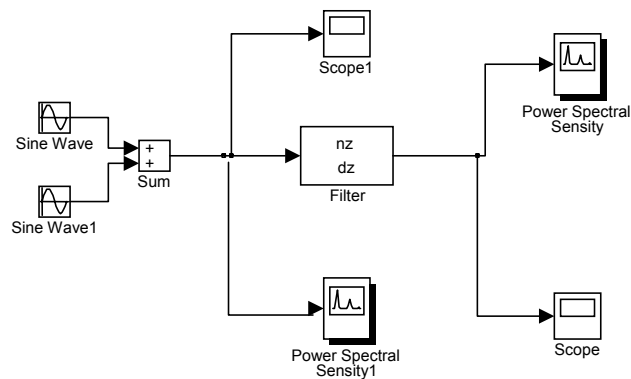
```

A SPECT.M függvény felépítése:

```

t=0:0.001:1;
y=sin(2*pi*50*t)+2*sin(2*pi*120*t);
rand('normal')
yn=y+0.5*rand(t);
Yn=fft(yn,1024);
n=length(Yn);
Pyy=Yn.*conj(Yn)/n;
f=500*(0:512)/512;
Pyy(514:1024)=[];
Pyy(2:512)=2*Pyy(2:512);
semilogy(f,Pyy).

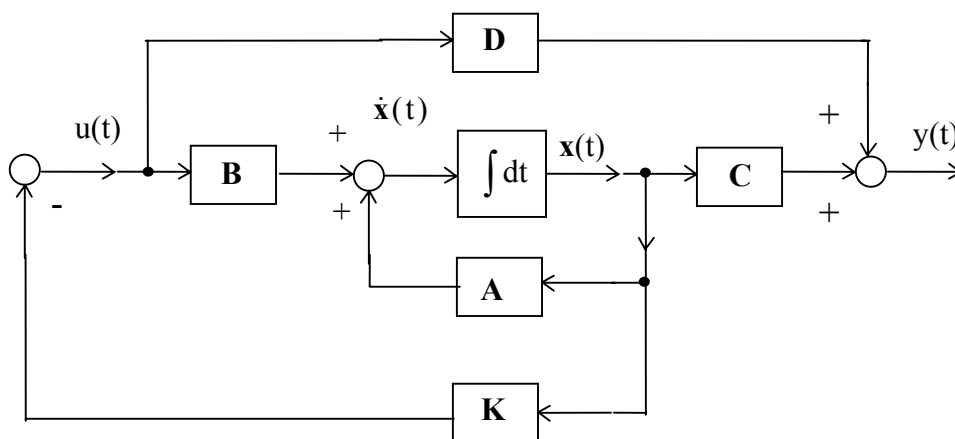
```



9.1. ábra. Egy digitális szűrő hatékonyságának bemutatása a kimenőjel spektrumának felrajzolásával

10. Példák állapot visszacsatolásra

10.1 Állapot visszacsatolás referencijel nélkül (ld. a 10.1. ábrát)



10.1. ábra. Állapot visszacsatolt szabályozás referencijel nélkül

A hőtechnikai rendszer állapotteres leírásából indulunk ki és használjuk a COOB.M függvényt:

```
%Ez a COOB.M M-fájl.  
%Hívás előtt definiálni kell a folytonos szabályozott szakaszt Z,P,K alakban, a Th  
holtidőt  
%és a T0 mintavételi időt. ( Th/T0 hányadosnak egész típusú változó lehet.)  
%Az irányíthatóságra vonatkozó kanonikus alakot az aj...dj , míg a  
%a megfigyelhetőségre vonatkozó kanonikus alakot az ac...dc mátrixokban kapjuk.  
mu=Th/T0;  
[ns,ds]=zp2tf(Z,P,K);  
[nz,dz]=c2dm(ns,ds,T0,'zoh');  
[ai,bi,ci,di]=tf2ss(nz,dz);  
Tt=rot90(eye(ones(ai)));  
[aj,bj,cj,dj]=ss2ss(ai,bi,ci,di,Tt);% Ez az irányíthatóságra vonatkozó kanonikus alak.  
[i1,i2]=size(aj);  
zer=zeros(mu,i1);  
au=zeros(mu,mu);  
bu=zeros(mu,1);  
bu(mu,1)=1;  
cu=zeros(1,mu);  
cu(1,1)=1;  
for i=1:mu,  
for j=1:mu,  
if j-i==1,  
au(i,j)=1;  
end  
end
```

```

end
aj=[aj bj*cu;zer(1:mu,:) au];
bj=[zer(1,:);bu];
cj=[cj zer(:,1)];% Ez a holtidővel is számoló irányíthatóságra vonatkozó kanonikus
alak.
Tt=rot90(eye(ones(aj)));
a0=rot90(aj);
b0=rot90(cj);
c0=rot90(bj);
[ak,bo,ck,dk]=ss2ss(a0,b0,c0,dj,Tt);
ao=fliplr(ak);
ck=rot90(ck);
co=rot90(ck);
do=dk;% Ez a megfigyelhetőségre vonatkozó kanonikus alak.
[i,j]=size(ao);
Ad=ao(1:(i-1),1:(i-1));
zer=zeros(i,i);
Ad=[Ad bo(1:(i-1));zer(1:1,1:i)];
Bd=zer(1:i,1:1);
Bd(i)=1;
Cd=zer(1:1,1:i);
Cd(i-1)=1;
ac=Ad;
bc=Bd;
cc=Cd;
dc=do;

```

1/ A rendszer leírása az állapottérben:

$$G(s) = \frac{T_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2,75s + 0,5} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 2,75 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

a/ State-Space modell (analóg):

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \text{tf2ss}(\mathbf{n}, \mathbf{d})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2,75 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0.$$

b/ Diszkrétizálás:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] = \text{c2dm}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, T_0, \text{'módszer'})$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}] = \text{c2dm}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, T_0, \text{'zoh'})$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0,4928 & -0,0899 \\ 0,1799 & 0,9874 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,1799 \\ 0,0251 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = 0.$$

c/ Alkalmazzuk a COOB.m függvényt:

-clear

Th = 0

T0 = 0,25

Z = [NaN]

P = [-0,1957 -2,554]

K = [1]

$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5029 & 1,4803 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_j = [0,02 \quad 0,0251]$

$\mathbf{a}_o = \begin{bmatrix} 0 & -0,5029 \\ 1 & 1,48 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,025 \end{bmatrix}$

$\mathbf{c}_o = [0 \quad 1]$ $d_o = 0$.

2/ Az állapot visszacsatolás megtervezése:

$$z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

$$z\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,627 & 0,361 \\ 0,0901 & 0,853 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-0,627 & -0,361 \\ -0,0901 & z-0,853 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,0251 \\ 0,115 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0251k_1 & 0,0251k_2 \\ 0,115k_1 & 0,115k_2 \end{bmatrix}$$

$$z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} z-0,627+0,0251k_1 & 0,0251k_2-0,361 \\ 0,115k_1-0,0901 & z-0,853+0,115k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}] = (z-0,853+0,115k_2)(z-0,627+0,0251k_1) - (0,115k_1-0,0901)(0,0251k_2-0,361)$$

$$z^2 - z(1,48 - 0,0251k_1 - 0,115k_2) + 0,5025 + 0,02k_1 - 0,069k_2 = 0$$

$$z_{1,2} = 0,5 \pm j0,2$$

$$(z-0,5-j0,2)(z-0,5+j0,2) = z^2 - z + 0,29 = 0$$

$$-1,48 + 0,0251k_1 + 0,115k_2 = -1$$

$$0,5025 + 0,02k_1 - 0,069k_2 = 0,29$$

$$0,0251k_1 + 0,115k_2 = 0,48$$

$$0,0201k_1 - 0,0698k_2 = -0,2125$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,24 & 3,677 \end{bmatrix}.$$

3/ A tervezés megvalósítható a MATLAB CONTROL SYSTEM TOOLBOX *acker* vagy *place* funkcióival is.

4/ Az állapot visszacsatolt kör szimulációja script-fájl segítségével:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0,1957)(s + 2,554)} = \frac{1}{s^2 + 2,75s + 0,5}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & +2 \\ 0,5 & -0,75 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = [1 \ 0]$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \text{C2D}(\mathbf{F}, \mathbf{G}, T_0) \quad T_0 = 0,25s$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,6277 & 0,3597 \\ 0,0899 & 0,8526 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,0251 \\ 0,115 \end{bmatrix}$$

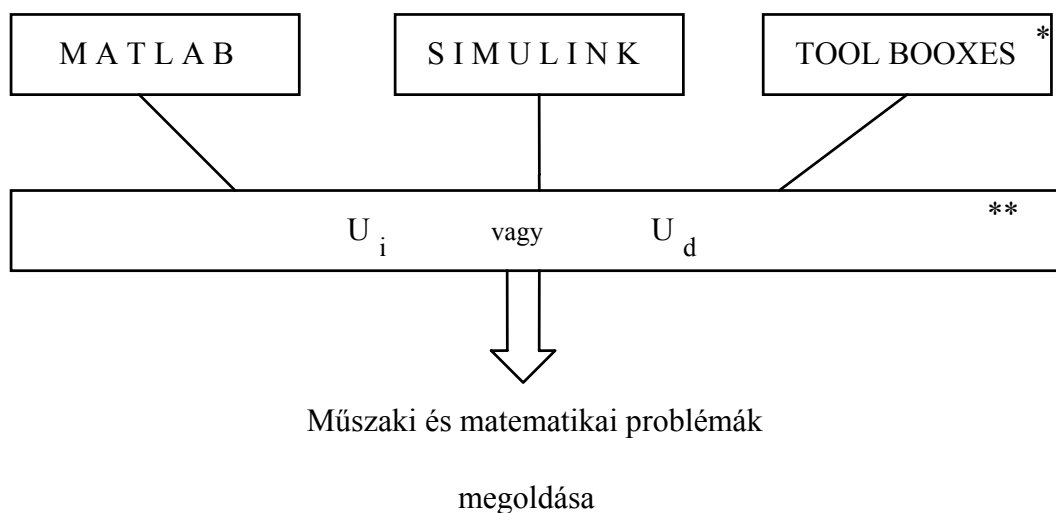
$$\mathbf{K} = [2,24 \ 3,667] \quad \mathbf{AA} = \mathbf{A} - \mathbf{B} * \mathbf{K}, \mathbf{k} = [0 : 1 : 9]$$

$$\mathbf{x}_0 = [2 \ 1] \quad \mathbf{u} = \text{zeros}(10,1) \quad \text{plot}(\mathbf{k}, \mathbf{x}).$$

A. melléklet - MATLAB alapismeretek

A **MATLAB** jelentése: **MÁTRIX Laboratórium**

A rendszer felépítése:



Megjegyzések: * Specializálódás mértékét jelenti

M A T L A B

Megvalósítja a

- a/ matematikai nyelvet (programnyelvet),
- b/ matematikai hátteret
- c/ grafikát
- d/ különböző interfészeket (U_i, U_d)

más program nyelvek / | \ valós idejű alkalmazások
Windows alkalmazások
felé

S I M U L I N K

Jelenti

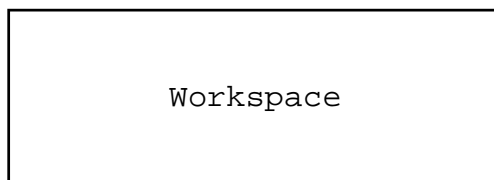
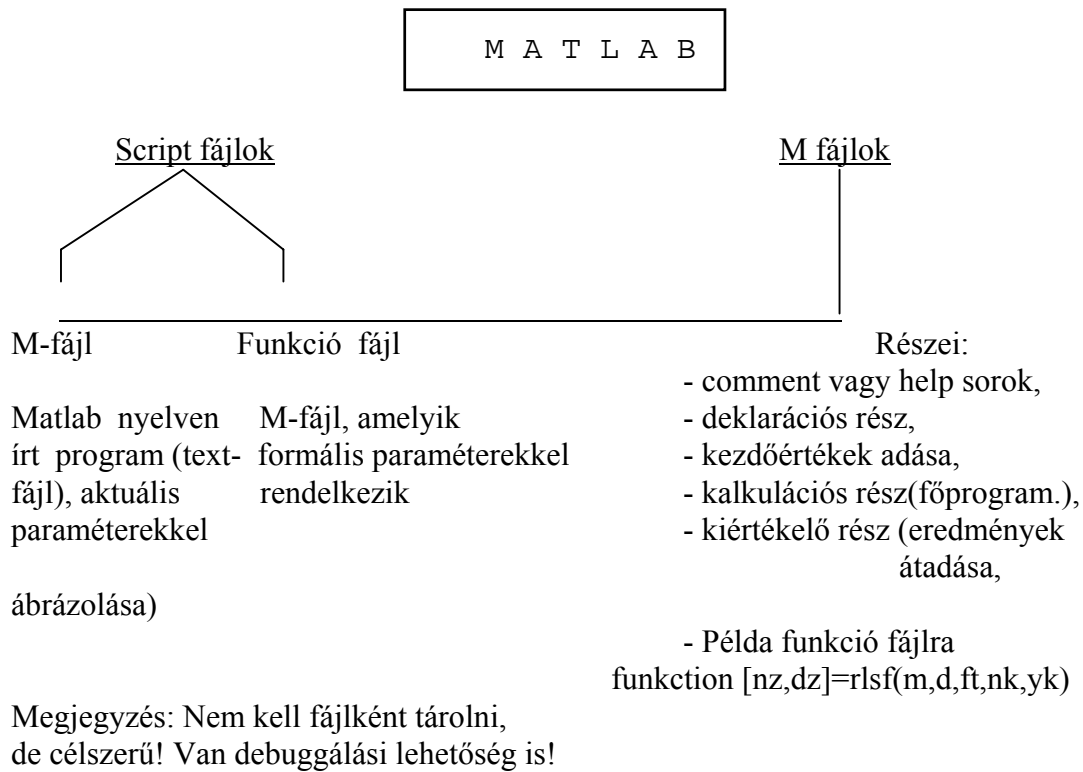
- a/ a MATLAB és a TOOLBOXES grafikus, blokkos leírását,
- b/ egy speciális grafikai nyelvet,
- c/ valós és nem valós idejű szimulációk megvalósítását,
- d/ különböző interfészek kialakítását.

Toolboxes - az adott alkalmazáshoz specializált; így például az oktatási verzió esetén rendelkezésre áll a

Signal Processing ToolBox és a
Control System ToolBox,

a kutatási verzió esetén pedig a

Nonlinear Control ToolBox,
Frequency Domain Identification ToolBox
System Identification ToolBox
Neural Network ToolBox
Optimization ToolBox



Az összes változó vagy konstans tárolására kijelölt speciális memória, amelynek tartalma lekérdezhető a who-val (whos) vagy tartalma törölhető a clear vagy clear "változó név" parancsokkal.

A MATLAB oktatási verzió használata

Jelenleg a számítógépeken elérhető:

- a/ a MATLAB for Windows alaprendszer,
- b/ a SIMULINK grafikus szimulációs rendszer,
- c/ a Signal Processing és a Control System ToolBox-ok.

A MATLAB funkciók főbb kategóriái

- | | |
|--------------------------------------|-------------------|
| - grafikus | - color, graphics |
| - adatanalízis | - datafun |
| - demonstrációk és példák | - demos |
| - alap matematikai függvények | - elfun |
| - alap matematikai mátrix függvények | - elmat, general |
| - nyelvi szabályok és ellenőrzések | - lang |
| - mátrix függvények | - matfun |
| - operátorok és speciális karakterek | - ops |
| - két-és háromdimenziós ábrázolás | - plotxy, plotxyz |
| - polinom műveletek | - polyfun |

A MATLAB Command Window

<u>Fájl</u>	<i>New</i>	M-fájl Figure } szerkesztése példa: push, pushm Model
	<i>Open</i>	létező M-fájl megnyitása
	<i>Open Selected</i>	létező M-fájl megnyitása, amennyiben a mezőben a név ki van
	command jelölve	
	<i>Save Workspace As</i>	a munkaterület elmentése egy meghatározott fájlnévvel
	<i>Run M-fájl</i>	a kijelölt M-fájl futtatása vagy egyszerűen az M- fájl nevének a leírásával van ld.
	(amennyiben útvonalban később a <i>path</i> utasítást)	futtatható útvonal kijelölése: path('A:\ OWN',path)
	<i>Look for Selected</i>	megkeresi a kijelölt sztringet az M-fájlok help szövegeinek első sorából
	<i>Print</i>	a Command Window-ban kijelölt szöveg nyomtatása, ha nincs kijelölés
	nyomtatja a section-t	
	<i>Printer Setup</i>	ismert a Windows alkalmazásokból
	<i>Exit MATLAB</i>	ismert a Windows alkalmazásokból
<u>Edit</u>	<i>Cut</i>	ismert a Windows alkalmazásokból
	<i>Copy</i>	ismert a Windows alkalmazásokból
	<i>Paste</i>	ismert a Windows alkalmazásokból
	<i>Clear Session</i>	törli azt a puffert, amely a szekció 'történetét' tartalmazza
<u>Options</u> e,	<i>Numeric Format</i>	a számábrázolási formák beállítása (short, short long, long e ajánlott)
	<i>Turn Echo on /off</i>	listázza /nem listázza a végrehajtott M-fájl parancsokat
	<i>Enable Background</i>	

mialatt a	Process	más Windows alkalmazásokat hagy futni, MATLAB a háttérben fut
	Uicontrols Font Font	a font készlet kijelölése az User IFC számára karakterkészlet és a háttérszín kijelölése a Command Window számára
Fájl <u>Windows</u> <u>Help</u>	Editor Preference	a default editor kijelölése az Open M-fájl vagy New ablakok részére ismert a Windows alkalmazásokból ismert a Windows alkalmazásokból

Példa a MATLAB Command Window használatára

Határozzuk meg az $Y(s) = \frac{1}{1+s}$ átviteli függvénnyel jellemzett tag nevezetes függvényeit!

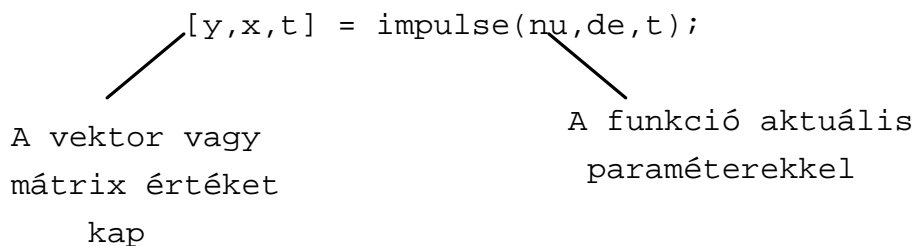
a/ Az átmeneti függvény meghatározása

Első lépés: az átviteli függvény megadása vektorok segítségével

$$nu = [0 \ 1]; \quad de = [1 \ 1];$$

A második lépés: az átmeneti függvényt az időtartományban leíró vektorok létrehozása a CONTROL SYSTEM TOOLBOX Isim vagy step funkciójával, előzőleg azonban definiáljuk az idővektort $t=[0:0.05:5]$; és $[y,x,t] = step(nu,de,t)$; majd az eredményt megjelenítjük $plot(t,y)$. Az egységes jelölési mód használata a szakirodalommal megegyező módon kívánatos, így x jelöli az állapot vektort, y a kimenőjel vektort.

b/ súlyfüggvény



c/ diszkrétizálás

```
[nd,dd]=c2dm(nu,de,T0,'zoh');
[nd,dd]c2d(nu,de,T0);
T0=0.5 s
[yd,xd]=dstep(nd,dd,10);
```


k=[0:1:9]; ahol nd és dd írja le a diszkrét modellt,
stairs(k,yd)

d/ a tengelyek feliratozása

Xlabel, Ylabel, Title
stairs(k,yd),xlabel('k'),ylabel('y(k)'),title('Discrete step response')

e/ Bode-diagram generálására két lehetőség kínálkozik

- automatikusan előállított frekvenciavektor segítségével a bode funkciót felhasználva vagy
- a felhasználó által előállított frekvenciavektor segítségével a logspace és a bode függvényeket használva, tehát esetünkben a parancsokat így kell megadni

[m,p,w]=bode(nu,de); (m: amplitúdó-vektor, fázisvektor, w frekvenciavektor)
vagy
w=logspace(-1,1,200); és [m,p,w]=bode(nu,de,w)

a Bode-diagram tengelyeinek feliratozása osztott koordináta síkkal:

subplot(211),semilogx(w,20*log10(m)),xlabel('w rad/s'),ylabel('a(w) dB'),
subplot(212),semilogx(w,p),xlabel('w rad/s'),ylabel('fi fok'),title('Bode
plot')

f/ Nyquist-diagram megszerkesztésére szolgáló parancsok

wl=linspace(0.01,10,300);
[re,im,wl]=nyquist(nu,de,wl);
nyquist(nu,de,wl),title('Nyquist plot').

A SIMULINK programrendszer

A rendszer alkalmazását egy példán keresztül mutatjuk be. Tervezzünk analóg PID szabályozóval felépített, mereven visszacsatolt szabályozási kört felhasználva az előzőekben alkalmazott átviteli függvényt szabályozott szakaszként. Legyenek a szabályozó paraméterei rendre $T_I = 5s$, $T_d = 1s$, $K_p = 10$, így a szabályozó átviteli függvényére adódik, hogy:

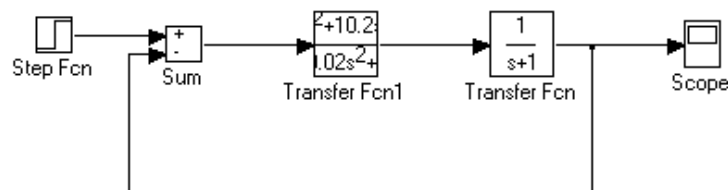
$$Y_c = \frac{11s^2 + 10,2s + 2}{0,1s^2 + s}$$

illetve a szabályozó egy másik beállításában ($T_I = 1s$, $T_d = 0,2s$, $K_p = 100$)

$$Y_c = \frac{2,2s^2 + 10,2s + 10}{0,02s^2 + s}$$

A szimulációt blokkokból állítjuk össze, amelynek az elemi lépései a következők:

- a MATLAB COMMAND WINDOW-ban leírjuk a simulink parancsot,
- a SIMULINK ablakban megnyitunk (a szokásos módon) egy felhasználói fájlt,
- a SIMULINK alkönyvtárakból (Sources, Sink, Linear stb.) kiválasztjuk a szükséges blokkokat,
- a választott blokkot (pl. Step Fcn) a felhasználói fájlalakra "vonszoljuk",
- a blokkokat összehuzalozzuk a problémának megfelelően,



- a blokkok paramétereit (amplitúdókat, átviteli függvényeket stb.) megadjuk,
- a szimuláció jellemzőit (időtartam, pontosság, integrálási módszer stb.) definiáljuk.

Mérési adatok feldolgozása a MATLAB segítségével

A mérési adatokat (például adatgyűjtővel fájlban eltárolt értékeket) legkönnyebben szövegfájlként tudjuk bevinni a MATLAB programba. A szöveg fájlnak három, szóközzel elválasztott oszlopa kell, hogy legyen. Például egy szabályozott szakasz be- és kimenőjelét a következőképpen kell eltárolnunk:

Valós idő	s	Kimenőjel	%	Bemenőjel	%
0.0		15.54		43.9	

Amennyiben a fájl numerikus értékeken kívül más sztringeket is tartalmazna, úgy ezeket szövegszerkesztővel a MATLAB-ba töltés előtt ki kell törölni. Legyenek az adatok az **s.dat** nevű fájlban, ekkor az alábbi műveleteket kell a Workspace szinten elvégezni.

- | | |
|------------------|--|
| a/ load s.dat | a fájl betöltése a munkaterületre |
| b/ n=length(s) | a vektorok hosszának meghatározása |
| c/ t=s(1:n,1) | az idővektor képzése |
| d/ y=s(1:n,2) | a kimenőjel vektorának előállítása |
| e/ x=s(1:n,3) | a bemenőjel vektorának előállítása |
| f/ plot(t,y,t,x) | a be- és a kimenőjel időfüggvényének megrajzolása. |

A rendszer modellek megadási módjai

Az átviteli függvény

A kimenőjel \mathcal{L} - transzformáltja: $H(s) \cdot U(s)$, ahol

$$H(s) = \frac{\text{NUM}(s)}{\text{den}(s)} = \frac{\text{NUM}(1)s^{nn-1} + \text{NUM}(2)s^{nn-2} + \dots + \text{NUM}(nn)}{\text{den}(1)s^{nd-1} + \text{den}(2)s^{nd-2} + \dots + \text{den}(nd)}$$

Példa átviteli függvény megadására:

$$H(s) = \frac{\left[\frac{3s+2}{s^3+2s+5} \right]}{3s^3+5s^2+2s+1} \quad \text{az átviteli függvény (MISO rendszer)}$$

$$\text{num} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{den} = [3 \ 5 \ 2 \ 1]$$

Zérus-pólus-erősítés alakban megadott átviteli függvény

$$H(s) = \frac{Z(s)}{p(s)} = k \frac{[s - Z(1)][s - Z(2)] \dots [s - Z(n)]}{[s - p^{(1)}][s - p^{(2)}] \dots [s - p^{(n)}]}$$

Példa

Határozzuk meg a z-p-k formát az utóbbi átviteli függvény esetén:

$$H(s) = \frac{4s+1}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$H(s) = 4 \frac{s+0,25}{(s+3)(s+2)(s+1)}$$

$$k=4, \quad z=-0,25, \quad p=[-3 \ -2 \ -1]$$

Zérus-pólus-erősítés alakból konverzió átviteli függvénybe:

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{zp2tf}(z, p, k)$$

Átviteli függvény alakból konverzió z-p-k alakba:

$$[z, p, k] = \text{tf2zp}(\text{num}, \text{den})$$

Irodalomjegyzék

1. Raymond G. Jacquot: Modern Digital Control Systems
Marcel Dekker, Inc. New York and Basel 1981.
2. Rolf Isermann: Digital Control Systems Fundamentals, Deterministic Control
Springer-Verlag 1989.
3. Csáki Frigyes: Lineáris szabályozási rendszerek szintézise
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
4. Csáki Frigyes: Fejezetek a szabályozástechnikából Állapotegyenletek
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

1. Bevezetés	2
1.1. A segédletben alkalmazott jelölések magyarázata	2
1.2. A mintavételezés	3
1.3. A mintavételezett jelek kvantálása A/D átalakító segítségével	4
1.4. Integrálás diszkrét rendszereknél	5
1.5. Differenciálás diszkrét rendszereknél.....	5
1.6. Shannon mintavételezési törvénye	6
2. A z-transzformáció.....	8
2.1. Az alapfüggvények z-transzformáltjai	8
3. Összefüggés az s- és a z-tartomány között	10
3.1. A z-transzformáció tulajdonságai	10
3.2. Az inverz z-transzformáció	10
3.2.1. Inverz z-transzformáció a polinomok osztásával	10
3.2.2. Részlet törtre bontás	11
4. Az impulzus átviteli függvény	14
4.1. Az impulzus átviteli függvény stabilitása.....	14
4.2. A frekvencia függvények értelmezése mintavételes rendszereknél	16
4.3. Összefüggés az s-tartománybeli pólusok és a z-tartománybeli pólusok között	18
5. Rendszerek leírása az állapotter módszer segítségével	19
6. A diszkrétizált folyamatmodellek meghatározási módjai.....	21
6.1. A modell meghatározása az alapfüggvények segítségével.....	21
6.2. ZOH figyelembevételével.....	21
6.3. Bilineáris függvény segítségével.....	21
6.4. Euler módszerrel.....	21
6.5. Folyamatmodell holtidővel.....	23
7. Diszkrét rendszerek matematikai modellel való leírása.....	25
7.1. Az állapotter módszer a rendszerek leírására, modellezésére	28
7.2. Diszkrét modellek állapotter leírása	30
7.2.1. Az állapotegyenlet kiértékelése	30
7.2.2. Az állapot átmeneti mátrix definíciója	30
7.2.3. Kanonikus alakok	33
7.2.4. Holtidős rendszerek leírása állapotterrel	34
7.2.5. Irányíthatóság	34
7.2.6. Megfigyelhetőség	35
7.3. Állapot visszacsatolt szabályozások.....	36
7.3.1. Alapjel-képzés állapot visszacsatolt rendszereknél.....	37
8. Paraméter optimalizált szabályozások.....	38
8.1. A négyzetes integrálkritérium	38
8.1.2. A polinom-operációs rendszer felépítése	38
8.1.3. Szabályozástechnikai algoritmusok.....	39
8.2. Példák paraméter optimalizált szabályozás tervezésére	40

8.2.1. Analóg szabályozási kör	40
8.2.2. Paraméter optimalizált digitális szabályozások tervezése	42
8.2.3. A PISCO program felépítése	45
8.2.4. Az optimalizálást elvégző program adatbázisának felépítése	46
8.2.5. Az optimális paraméterek inicializálási értékeinek meghatározása Bode- diagram segítségével	49
8.2.6. Példa holtidős, analóg szabályozás paraméter optimalizálására	51
9. Adatok analízise a MATLAB rendszerben.....	55
9.1. Oszlop orientált analízis	55
9.2. A NaN-ok kezelése (Not a Number) a MATLAB-ban.....	55
9.3. Az FFT bemutatása a MATLAB segítségével	55
10. Példák állapot visszacsatolásra.....	57
10.1 Állapot visszacsatolás referenciajel nélkül (ld. a 10.1. ábrát)	57
A. melléklet - MATLAB alapismeretek	61
A MATLAB oktatási verzió használata	62
A MATLAB funkciók főbb kategóriái	63
A MATLAB Command Window	63
A SIMULINK programrendszer.....	65
Mérési adatok feldolgozása a MATLAB segítségével.....	66
A rendszer modellek megadási módjai.....	67
Irodalomjegyzék.....	68