

Hasonlósági kritériumok hőátviteli feladatoknál

(írta: Dr. Ortutay Miklós)

A Fourier-Kirchhoff egyenletet általában nem lehet integrálni, a megoldáshoz szükséges feltételek megfogalmazási nehézségei miatt. A műszaki gyakorlatban hőátviteli berendezések esetén méretezésnél, ellenőrzésnél hasonlósági kritériumokkal dolgoznak.

A hasonlóság elmélet (módszer) lehetővé teszi, hogy kísérleti jelenségek általánosítása révén, a vizsgált határok között, hasonló jelenségekre integrális megoldást nyerjünk integrálás nélkül. (Ha a kiindulás pontatlan a végeredmény is!)

A hasonlóság elmélet II. tétele (Federman-Buckingham) szerint:

Valamely jelenséget leíró differenciálegyenlet integrálja hasonlósági kritériumok függvényeként előállítható. Ezt a függvényt kritériális egyenletnek nevezik. A kritériális egyenlet állandóit kísérleti úton kell meghatározni.

Két jelenség hasonló, ha a jelenséget egyértelműen meghatározó differenciálegyenletek azonosak és amelyek esetében az egyértelműségi feltételek (matematikailag a differenciálegyenletek megoldásához szükséges feltételek: értelmezési tartomány, peremfeltétel, kezdeti feltétel, állapotegyenlet) hasonlósága teljesül. Az egyértelműségi feltételek hasonlóságának a hasonlóságot meghatározó kritériumok egyenlősége felel meg.

Tömören: Azonos differenciálegyenletek, azonos hasonlósági kritériumok.

Konvektív hőátadásnál a hőáram:

$$q = \alpha \Delta t$$

Nyilvánvaló, hogy ez a hőáram halad a lamináris határrétegen keresztül és így felírható a Fourier féle összefüggés:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dl}$$

A vizsgált jelenségre így felírható:

$$\alpha \Delta t = -\lambda \frac{dt}{dl}$$

A modellre azonos egyenlet vonatkozik, jelölésben m modellre utal.

$$\alpha_m \Delta t_m = -\lambda_m \frac{dt_m}{dl_m}$$

A vizsgált jelenség és modell különböző, de egynemű mennyiségei között a hasonlósági léptékek, hasonlósági állandók teremtenek kapcsolatot. A hasonlósági lépték fontos tulajdonsága, hogy az egynemű mennyiségek aránya helyettesíthető a növekmények arányával.

$$c_w = \frac{w}{w^*} = \frac{w_1 - w_2}{w_1^* - w_2^*} = \frac{dw}{dw^*}$$

Hasonlósági állandók a jelenség és modell között:

$$c_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_m}, \quad c_t = \frac{t}{t_m}, \quad c_\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_m}, \quad c_l = \frac{l}{l_m}$$

A hasonlósági állandókat behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$c_\alpha c_t \alpha_m \Delta t_m = -\frac{c_\lambda c_l}{c_l} \lambda_m \frac{dt_m}{dl_m},$$

a modellre vonatkozó egyenlettel azonos egyenletet kapunk

$$\frac{c_\alpha c_l}{c_\lambda} \alpha_m \Delta t_m = -\lambda_m \frac{dt_m}{dl_m}$$

ha a hasonlósági állandókból képzett kifejezés, a hasonlósági indikátor hasonlósági invariáns, értéke 1.

$$\frac{c_a c_l}{c_\lambda} = 1$$

A hasonlósági invariánsból meghatározható hasonlósági kritérium a Nusselt szám:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{\alpha_m l_m}{\lambda_m}$$

A Fourier- Kirchhoff összefüggéssel

$$a \nabla^2 t = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w \nabla t$$

azonos egyenlet állítható elő a hasonlósági léptékekkel

$$\frac{c_a c_l}{c_l^2} a \nabla^2 t = \frac{c_t}{c_\tau} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{c_w c_l}{c_l} w \nabla t$$

ha az együtthatók megegyeznek, azaz ha

$$\frac{c_a c_l}{c_l^2} = \frac{c_t}{c_\tau} = \frac{c_w c_l}{c_l}$$

A három kifejezésből (két egyenlet) két független hasonlósági kritérium állítható elő:

$$\text{Fourier szám: } Fo = \frac{\tau a}{l^2}$$

$$\text{Peclet szám: } Pe = \frac{wl}{a}$$

Hőátadásnál a fluidum részecskéi mozognak, konvekció van. A fluidumot összenyomhatatlannak tekintve felírható Navier-Stokes egyenlet:

$$\rho g - \text{grad} p + \eta \Delta w = \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho w \text{ grad} w$$

$$\rho g \quad \Delta p/l \quad \eta w/l^2 \quad \rho w/\tau \quad \rho w^2/l$$

A differenciálegyenletek azonosságára vonatkozó előírás miatt négy hasonlósági kritérium állítható elő a külső erőterre, a nyomó, a sűrűlási, a tehetetlenségi erőre és az instacionaritásra vonatkozó kifejezések figyelembevételével:

$$\text{Froude szám} \quad Fr = \frac{\rho w^2}{l \rho g} = \frac{w^2}{lg} \quad \text{vagy} \quad Fr = \frac{w}{\sqrt{lg}}$$

$$\text{Euler szám} \quad Eu = \frac{\Delta p l}{l \rho w^2} = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$$

$$\text{Reynolds szám} \quad Re = \frac{\rho w^2 l^2}{l \eta w} = \frac{\rho w l}{\eta} = \frac{w l}{\nu}$$

$$\text{Homokronitás} \quad Ho = \frac{\rho w^2}{l} / \rho \frac{w}{\tau} = \frac{\tau w}{l}$$

Ha a Navie-Stokes egyenletben a külső erőter helyett a fajlagos tömegert ($\rho g \beta \Delta t$) vesszük figyelembe előállítható a Grashof szám:

Képezzük a fajlagos tömegertre és a sűrűlási erőre jellemző kifejezések hányadosát:

$$\frac{\rho g \beta \Delta t}{\eta w / l^2} = \frac{g l^2 \rho}{\eta w} \beta \Delta t$$

A kapott kifejezést szorozva Reynolds számmal nyerjük a Grashof számot:

$$Gr = \frac{gl^3\rho^2}{\eta^2}\beta\Delta t$$

A hasonlósági kritériumok számát mint látható az egyenletek határozták meg. Azt, hogy az egyenletekből hogyan képzünk invariánst tulajdonképpen önkényes. Nyilvánvaló, hogy az általánosan alkalmazott hasonlósági kritériumokkal célszerű dolgozni.

A levezetett (?) hasonlósági kritériumokból újabb hasonlósági kritériumok állíthatók elő.

A β köbös hőtágulási együttható segítségével felírható a Δt hőmérsékletkülönbség hatására létrejövő sűrűségváltozás:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta t) \quad \text{ahonnan:} \quad 1 - \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \beta\Delta t$$

Ezt figyelembe véve a Grashof számból előállítható az Archimédeszi szám:

$$Ar = \frac{gl^3\rho^2}{\eta^2} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{gl^3}{\nu^2} \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}$$

A Ho reciprokát Strouhal számnak nevezik: $Sr = \frac{1}{\tau w}$

A Peclet számból a Re szám figyelembevételével előállítható a Prandtl szám: $Pr =$

$$\frac{Pe}{Re} = \frac{\frac{wl}{a}}{\frac{wl}{\nu}} = \frac{\nu}{a}$$

A Nusselt, Prandtl és Reynolds számokból a Stanton szám állítható elő:

$$St = \frac{Nu}{Pr Re}$$

A hasonlósági kritériumok lehetővé teszik, hogy kísérleti mérési sorozatokból meghatározott kritériális egyenletek segítségével meghatározzuk az α hőátadási tényezőt, hiszen létezik (ha nincs elvileg előállítható) az általános megoldás:

$$f(Fo, Nu, Pe, Ho, Re, Fr, L_1/L_2, \dots) = 0$$

ahol az L_1/L_2 törtek a geometriai hasonlóságra vonatkozó szimplexek.

Mivel az α hőátadási tényező meghatározása a cél a kifejezés szokásos általános alakja:

$$Nu = f(Fo, Pe, Ho, Re, Fr, L_1/L_2, \dots) \text{ ill.}$$

$$Nu = f(Fo, Pr, Ho, Re, Fr, L_1/L_2, \dots)$$

Stacioner esetben Fo és Ho nem szerepel és ha a gravitációs erő hatása a hőhordozó közeg áramlására kicsi a Fr szám is figyelmen kívül hagyható:

$$Nu = f(Re, Pr, L_1/L_2, \dots)$$

Abban az esetben, ha a hőátadásnál kialakuló áramlást a közeg sűrűségkülönbsége hozza létre az általános kritériális egyenlet:

$$Nu = f(Pr, Gr, \dots)$$