Hasonlósági kritériumok hőátviteli feladatoknál

(írta: Dr. Ortutay Miklós)

A Fourier-Kirchhoff egyenletet általában nem lehet integrálni, a megoldáshoz szükséges feltételek megfogalmazási nehézségei miatt. A műszaki gyakorlatban hőátviteli berendezések esetén méretezésnél, ellenőrzésnél hasonlósági kritériumokkal dolgoznak.
A hasonlóság elmélet (módszer) lehetővé teszi, hogy kísérleti jelenségek általánosítása révén, a vizsgált határok között, hasonló jelenségekre integrális megoldást nyerjünk integrálás nélkül. (Ha a kiindulás pontatlan a végeredmény is!)
A hasonlóság elmélet II. tétele (Federman-Buckingham) szerint:
Valamely jelenséget leíró differenciálegyenlet integrálja hasonlósági kritériumok függvényeként előállítható. Ezt a függvényt kritériális egyenletnek nevezik. A kritériális egyenlet állandóit kísérleti úton kell meghatározni.
Két jelenség hasonló, ha a jelenséget egyértelműen meghatározó differenciálegyenletek azonosak és amelyek esetében az egyértelműségi feltételek (matematikailag a differenciálegyenletek megoldásához szükséges feltételek: értelmezési tartomány, peremfeltétel, kezdeti feltétel, állapotegyenlet) hasonlósága teljesül. Az egyértelműségi feltételek hasonlóságának a hasonlóságot meghatározó kritériumok egyenlősége felel meg.
Tömören: Azonos differenciálegyenletek, azonos hasonlósági kritériumok.
Konvektiv hőátadásnál a hőáram:

$$q = \alpha \, \Delta t$$

Nyilvánvaló, hogy ez a hőáram halad a lamináris határrétegen keresztül és így felírható a Fourier féle összefüggés:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dl}$$

A vizsgált jelenségre így felírható:

$$\alpha \; \Delta t = -\lambda \frac{dt}{dl}$$

A modellre azonos egyenlet vonatkozik, jelölésben *m* modellre utal.

$$\alpha_m \Delta t_m = -\lambda_m \frac{dt_m}{dl_m}$$

A vizsgált jelenség és modell különböző, de egynemű mennyiségei között a hasonlósági léptékek, hasonlósági állandók teremtenek kapcsolatot. A hasonlósági lépték fontos tulajdonsága, hogy az egynemű mennyiségek aránya helyettesíthető a növekmények arányával.

$$c_w = \frac{w}{w^*} = \frac{w_1 - w_2}{w_1^* - w_2^*} = \frac{dw}{dw^*}$$

Hasonlósági állandók a jelenség és modell között:

$$c_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_m}, \qquad c_t = \frac{t}{t_m}, \qquad c_\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_m}, \qquad c_l = \frac{l}{l_m}$$

A hasonlósági állandókat behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$c_\alpha c_t \;\; \alpha_m \Delta t_m = - \frac{c_\lambda c_t}{c_l} \;\; \lambda_m \frac{dt_m}{dl_m},$$

a modellre vonatkozó egyenlettel azonos egyenletet kapunk

$$\frac{c_\alpha c_l}{c_\lambda} \;\; \alpha_m \Delta t_m = -\lambda_m \frac{dt_m}{dl_m}$$

ha a hasonlósági állandókból képzett kifejezés, a hasonlósági indikátor hasonlósági invariáns, értéke 1.

$$\frac{c_\alpha c_l}{c_\lambda} = 1$$

A hasonlósági invariánsból meghatározható hasonlósági kritérium a Nusselt szám:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{\alpha_m l_m}{\lambda_m}$$

A Fourier- Kirchhoff összefüggéssel

$$a\,\nabla^2 t = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w\nabla t$$

azonos egyenlet állítható elő a hasonlósági léptékekkel

$$\frac{c_a c_t}{c_l^2} a\,\nabla^2 t = \frac{c_t}{c_\tau}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{c_w c_t}{c_l} w\nabla t$$

ha az együtthatók megegyeznek, azaz ha

$$\frac{c_a c_t}{c_l^2} = \frac{c_t}{c_\tau} = \frac{c_w c_t}{c_l}$$

A három kifejezésből (két egyenlet) két független hasonlósági kritérium állítható elő:

$$\text{Fourirer szám:} Fo = \frac{\tau\, a}{l^2}$$

$$\text{Peclet szám:} \quad Pe = \frac{wl}{a}$$

Hőátadásnál a fluidum részecskéi mozognak, konvekció van. A fluidumot összenyomhatatlannak tekintve felírható Navier-Stokes egyenlet:

$$\rho g - \text{grad}p + \eta\Delta w = \rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho w\ \text{grad}w$$

$$\rho g \qquad \Delta p/l \qquad \eta w/l^2 \qquad \rho w/\tau \qquad \rho w^2/l$$

A differencálegyenletek azonosságára vonatkozó előírás miatt négy hasonlósági kritérium állítható elő a külső erőtérre, a nyomó, a súrlódási, a tehetetlenségi erőre és az instacioneritásra vonatkozó kifejezések figyelembevételével:

Froude szám $\quad Fr = \frac{\rho w^2}{l\rho g} = \frac{w^2}{lg} \quad$ vagy $\quad Fr = \frac{w}{\sqrt{lg}}$

Euler szám $\quad Eu = \frac{\Delta p\ l}{l\rho w^2} = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$

Reynolds szám $\quad Re = \frac{\rho w^2 l^2}{l\eta w} = \frac{\rho w l}{\eta} = \frac{wl}{\nu}$

Homokronitás $\quad Ho = \frac{\rho w^2}{l} / \rho\frac{w}{\tau} = \frac{\tau w}{l}$

Ha a Navie-Stokes egyenletben a külső erőtér helyett a fajlagos tömegerőt ($\rho g\beta\Delta t$) vesszük figyelembe előállítható a Grashof szám:

Képezzük a fajlagos tömegerőre és a súrlódási erőre jellemző kifejezések hányadosát:

$$\frac{\rho g\beta\Delta t}{\eta w / l^2} = \frac{g l^2 \rho}{\eta w}\beta\Delta t$$

A kapott kifejezést szorozva Reynolds számmal nyerjük a Grashof számot:

$$Gr = \frac{gl^3\rho^2}{\eta^2}\beta\Delta t$$

A hasonlósági kritériumok számát mint látható az egyenletek határozták meg. Azt, hogy az egyenletekből hogyan képzünk invariánst tulajdonképpen önkényes. Nyilvánvaló, hogy az általánosan alkalmazott hasonlósági kritériumokkal célszerű dolgozni.
A levezetett (?) hasonlósági kritériumokból újabb hasonlósági kritériumok állíthatók elő.
A β köbös hőtágulási együttható segítségével felírható a Δt hőmérsékletkülönbség hatására létrejövő sűrűségváltozás:

$$\rho = \rho_0(1-\beta\Delta t) \qquad \text{ahonnan:} \qquad 1-\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho_0-\rho}{\rho_0} = \beta\Delta t$$

Ezt figyelembe véve a Grashof számból előállítható az Archimédeszi szám:

$$Ar = \frac{gl^3\rho^2}{\eta^2}\frac{\rho_0-\rho}{\rho_0} = \frac{gl^3}{\upsilon^2}\frac{\rho_0-\rho}{\rho}$$

A Ho reciprokát Strouhal számnak nevezik: $Sr = \dfrac{l}{\tau w}$

A Peclet számból a Re szám figyelembevételével előállítható a Prandtl szám: $Pr =$

$$\frac{Pe}{Re} = \frac{\frac{wl}{a}}{\frac{wl}{\nu}} = \frac{\nu}{a}$$

A Nusselt, Prandtl és Reynolds számokból a Stanton szám állítható elő:

$$St = \frac{Nu}{Pr\,Re}$$

A hasonlósági kritériumok lehetővé teszik, hogy kísérleti mérési sorozatokból meghatározott kritériális egyenletek segítségével meghatározzuk az α hőátadási tényezőt, hiszen létezik (ha nincs elvileg előállítható) az általános megoldás:

$$f(Fo, Nu, Pe, Ho, Re, Fr, L_1/L_2, ...) = 0$$

ahol az L_1/L_2 törtek a geometriai hasonlóságra vonatkozó szimplexek.
Mivel az α hőátadási tényező meghatározása a cél a kifejezés szokásos általános alakja:

$$Nu = f(Fo, Pe, Ho, Re, Fr, L_1/L_2 ....) \text{ ill.}$$

$$Nu = f(Fo, Pr, Ho, Re, Fr, L_1/L_2 ....)$$

Stacioner esetben Fo és Ho nem szerepel és ha a gravitációs erő hatása a hőhordozó közeg áramlására kicsi a Fr szám is figyelmen kiül hagyható:

$$Nu = f(Re, Pr, L_1/L_2 ....)$$

Abban az esetben, ha a hőátadásnál kialakuló áramlást a közeg sűrűségkülönbsége hozza létre az általános kritériális egyenlet:

$$Nu = f(Pr, Gr, ..)$$