A hőmérsékleti sugárzás

(Dr. Paripás Béla előadásai alapján lejegyezték a Miskolci egyetem harmadéves informatikus hallgatói)

Alapjelenségek

Mindennapi tapasztalat, hogy *a melegített testek hősugárzást (infravörös sugárzást) bocsátanak ki.* Például a forró kályha melegét a bőrünk a fűtőtesttől távol akkor is érzékeli, ha a szoba levegője egyébként még hideg. A testeket *tovább melegítve* azok *egyre nagyobb frekvenciájú* elektromágneses sugárzást bocsátanak ki (vörös- majd fehér izzás), miközben a kibocsátott *összenergia a hőmérséklettel* rohamosan *növekszik*. Mivel ezzel az elektromágneses sugárzás kibocsátó képességgel minden melegített test rendelkezik, ennek az oka nyilvánvalóan a test hőmérséklete és nem különleges összetétele. Így ezt a sugárzást hőmérsékleti sugárzásnak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy vannak különleges összetételű testek (fénycső, szentjánosbogár, stb.), amelyek *hidegen* is képesek fényt kibocsátani és sugárzásuk nem ebbe a kategóriába tartozik *(lumineszcencia sugárzások).* Már a múlt század első felében ismertté vált az a tény is, hogy hőmérsékleti sugárzást a *környezetüknél hidegebb testek is kibocsátanak,* ennek a mennyisége azonban kisebb annál, mint amit e tárgyak a környezet sugárzásából elnyelnek. Ehhez hasonlóan a hőmérsékleti egyensúly nem a hősugárzás hiányát jelenti, hanem csak azt, hogy a környezetével *hőmérsékleti egyensúlyban* lévő tárgy pontosan *annyi energiát sugároz ki, mint amennyit elnyel.* Szintén több mint egy évszázados az a felismerés, hogy a tárgyak sugárzás kibocsátó képessége (emisszióképesség) és sugárzás elnyelő képessége (abszorpcióképesség) egymással szigorúan arányos mennyiségek.

Spektrális emisszióképesség: e (ν, T)
A T hőmérsékletű test egységnyi felülete által egységnyi idő alatt a ν körüli egységnyi frekvenciatartományban kisugárzott elektromágneses energia. Anyagfüggő.
[teljesítménysűrűség / frekvencia]

Spektrális abszorpcióképesség: a (ν, T)
Megadja, hogy a T hőmérsékletű test a ν körüli egységnyi frekvencia-tartományban a ráeső elektromágneses sugárzás hányad részét nyeli el. Anyagfüggő.
$0 < a(\nu, T) < 1$ (nincs dimenziója)

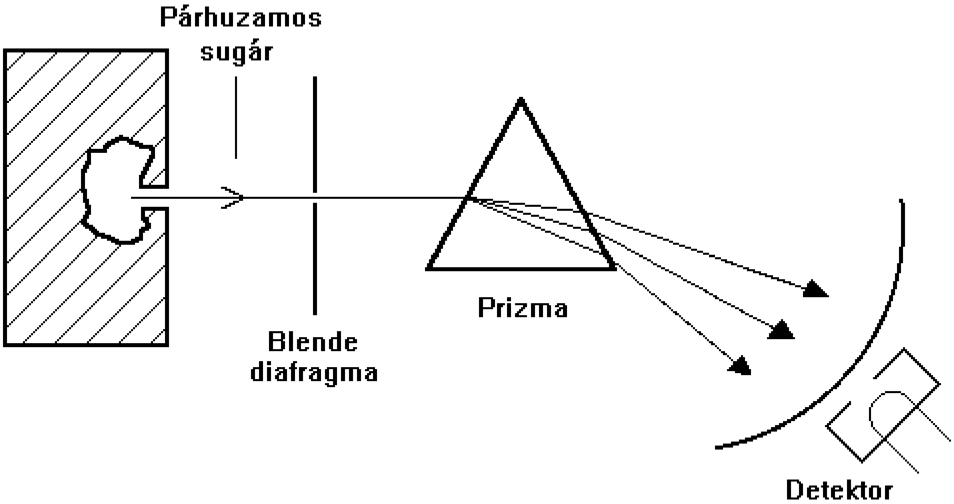
KIRCHHOFF törvény:

$$E(\nu,T) = \frac{e(\nu,T)}{a(\nu,T)}$$: anyagi minőségtől független univerzális függvény.

Azaz bár a test emisszióképessége és abszorpcióképessége anyagfüggő, a hányadosuk független az anyagi minőségtől.
A fizikában arra törekszünk, hogy anyagi minőségtől független egyenleteket alkossunk, ezért $E(\nu,T)$-t akarjuk használni.

Ha $a(\nu,T)=1$ akkor a test abszolút fekete test. Ekkor $e(\nu,T) = E(\nu,T)$.

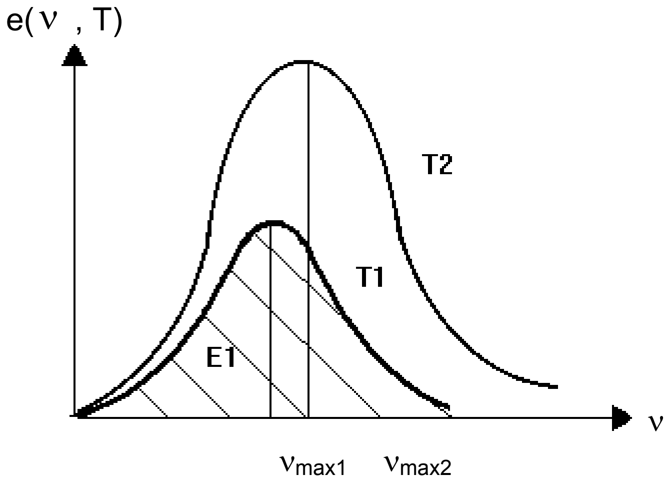
Az abszolút fekete test modellje:
Legjobb modellje egy üreg falán lévő lyuk. Az üregbe a lyukon belépő sugárzás a szemközti falon szóródva igen kis eséllyel tud a lyukon visszamenni. A modell akkor jó, ha a lyuk mérete igen kicsi az üreghez képest. Még tökéletesebb a modell, ha az üreg fala maga is jó sugárzás elnyelő, például kormozott.



<u>detektor</u>: eszköz, melyben egy hőmérő a bejövő sugárzást méri

Izzítsuk a testet T hőmérsékletre, majd blendézzük (blende = pici rések sorozata).
Bármely közeg törésmutatója függvénye a frekvenciának ⇒ DISZPERZIÓ / $n = n(\nu)$ /

Eredmény: Az abszolút fekete test sugárzásának spektrális eloszlása.



ν_{max1} : a maximális spektrális emisszióhoz tartozó frekvencia T_1 hőmérsékleten.
ν_{max2}: a maximális spektrális emisszióhoz tartozó frekvencia T_2 hőmérsékleten. $T_2 > T_1$

Állítások:

1. Melegebb fekete test minden frekvencián jobban sugároz (több sugárzást bocsát ki)
2. A kibocsátott összenergia (egységnyi felület által kibocsátott összes energia) :

$$E(T) = \int_0^\infty e(\nu, T)d\nu$$

E(T) a hőmérséklet növelésével rohamosan növekszik.

Az ehhez tartozó kvantitatív képlet:

$E(T) = \sigma T^4$ <u>Stefan - Boltzmann törvény</u>

(a kibocsátott összenergia az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos)

σ : Stefan - Boltzmann konstans, értéke : $5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{W}{m^2 K^4}$

(ez az érték kísérletileg és elméletileg is bizonyított)

pl: $T_2=2\,T_1$

$E(T_2)=16\,E(T_1)$

Tehát kétszer magasabb hőmérsékletű test tizenhatszor több energiát bocsát ki.

3. Ha a hőmérséklet (T) nő, akkor a maximális spektrális emisszióhoz frekvencia (ν_m) is nő.

Minél jobban melegítjük annál nagyobb frekvenciájú a sugárzás.

$$\frac{\nu_{m2}}{\nu_{m1}} = \frac{T_2}{T_1}$$ <u>WIEN – törvény</u> (Wien - féle eltolódási törvény)

$$\left(\frac{\nu_{m2}}{T_2} = \frac{\nu_{m1}}{T_1} \right)$$ (Másik alakja)

A spektrális eloszlásfüggvény E(ν,T) levezetése:

(Planck 1900. December 14. a Porosz Akadémián 17 nappal a századunk előtt.)

<u>1. Lépés Rayleigh-Jeans törvény(levezetése)</u>

A klasszikus termodinamika nem tudta megmagyarázni az eloszlásfüggvény alakját, ez csak a kvantummechanika segítségével látható be.

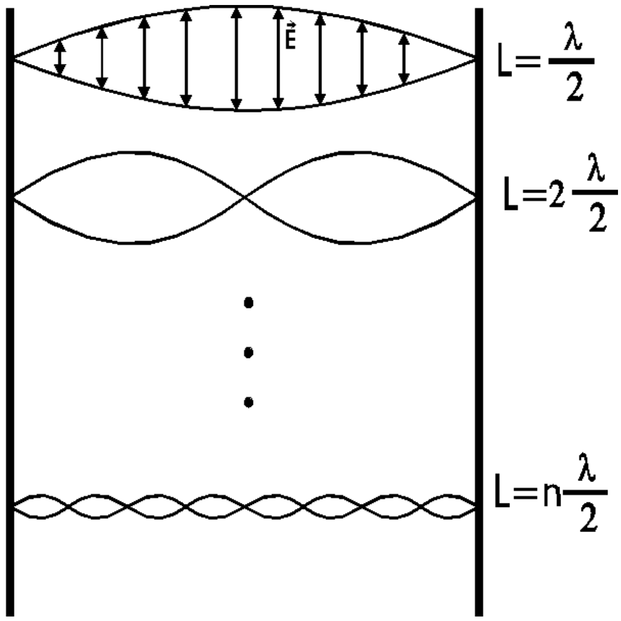
$U(\nu,T)$: spektrális energiasűrűség: ez a 3. spektrális mennyiség. Jelentése: A ν körüli egységnyi frekvenciatartományra eső elektromágneses sugárzás energiasűrűsége.

Bizonyítható: $U(\nu,T) \sim e(\nu,T)$ ($e(\nu,T) = c / 4 \cdot U(\nu,T)$)

$U(\nu,T) = Z(\nu,T)\varepsilon$ Ahol Z a ν körüli egységnyi frekvenciatartományban, egységnyi térfogatban lévő állóhullám módusok száma, ε pedig az egy állóhullám módusra jutó átlagos energia.

Az üregben az elektromágneses sugárzás (energia) nyilvánvalóan elektromágnese állóhullámok formájában van jelen, hisz a sugárzás kitölti az üreget.

1 dimenzióban:



n jelenti azt, hogy hány félhullám fér el.

3 dimenzióban: n_1, n_2, n_3 jellemzi az állóhullámot (1 dimenzióban csak n jellemezte). Egy ilyen számhármassal jellemzett állóhullám az állóhullám módus. Mivel ilyen számhármas végtelen sok lehet ezért végtelen sok állóhullám alakulhat ki, a módusok száma is végtelen.

Állítás:

$z(\nu,T) \sim \nu^2$

$z(\nu,T) = K\nu^2$ ahol K az arányossági tényező, természeti állandó

Bizonyítás:

Kiindulunk 1 dimenzióból:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$ tudjuk: $\lambda = \frac{c}{\nu}$

$$L = n\frac{c}{2\nu} \xrightarrow{\text{kifejezve}} \nu = \frac{c}{2L}n$$

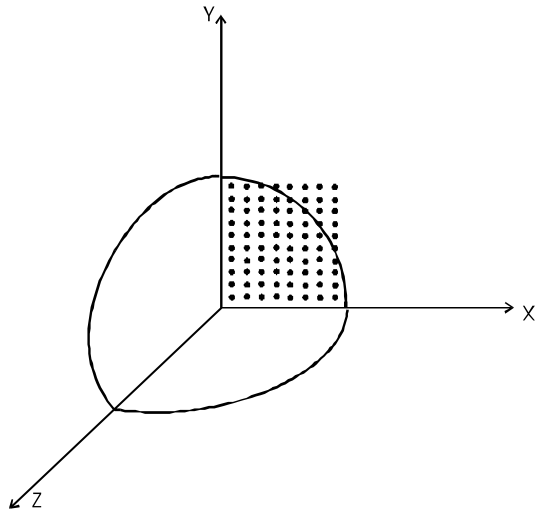
3 dimenzióban:

$$\nu = \frac{c}{2L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$ ilyen frekvenciájú állóhullám módusok alakulhatnak ki

átalakítjuk:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2L\nu}{c^2}\right)^2$$

Az érdekel minket, hogy a ν körüli egységnyi frekvenciatartományba hány állóhullám módus esik.



Annyi állóhullám módus létezik ahány pozitív helykoordinátákkal jellemzett pont van.
Azon pontok melyeknek koordinátáinak négyzetösszege megegyezik, azok frekvenciája is megegyezik.

Megvizsgáljuk, hogy a $\frac{2L\nu}{c}$ sugarú gömbnyolcad egységnyi vastagságú héja hány pontot tartalmaz.

Következtetés: annyit amennyi a térfogata (ez jó közelítés ha a gömbök nagyok)

A nyolcad gömb térfogata: $V = \frac{1}{8}4\pi\left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 . \frac{2L}{c}$ $\qquad dR = \frac{2L}{c}d\nu = \frac{2L}{c}$, mert $d\nu=1$

$V = 2\pi\frac{L^2\nu^2}{c^2}.\frac{2L}{c} = \frac{4L^3\nu^2}{c^3}$ az állóhullám módusok száma ennek 2-szerese, mert az elektromágneses hullámban 2-féle polarizáció létezik.

$$z(\nu,T) = 8\pi\frac{L^3}{c^3}\nu^2$$

$$z(\nu,T) = \frac{Z(\nu,T)}{V} = \frac{8\pi}{c^3}.\nu^2$$

$$U(\nu,T) = K\nu^2\bar{\varepsilon} \quad ; \; K = \frac{8\pi}{c^3}$$

$\bar{\varepsilon}$: Egy állóhullám módusra jutó átlagos energia.

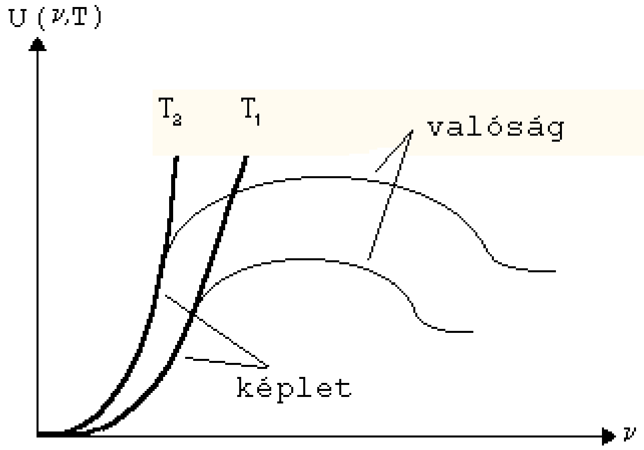
Klasszikus fizika szerint: Egy állóhullám módus a termodinamika szerint két termodinamikai szabadsági fokú rendszer.

$$\bar{\varepsilon} = 2\cdot\frac{1}{2}kT$$

$$\bar{\varepsilon} = kT$$

<u>Rayleigh-Jeans törvény</u>

$U(\nu,T) = K\nu^2 kT$ $\qquad$ k: Boltzmann-állandó



A parabolák csak kezdetben írják le jól. Ez csak kis frekvenciánál igaz.

2. Lépés

1900 dec. 14. Planck:

A termodinamikában van a hiba. Nem jó az ekvipartíció minden körülmények között.

Átlagos osszcillátor energia= $\frac{\text{összes energia}}{\text{összes osszcillator}}$ osszcillátor=módus

Igaz a Boltzmann-féle energia eloszlás!

$$N(E_i) = \frac{e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}} = N_0 e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_i E_i N(E_i)}{\sum_i N(E_i)}$$

Diszkrét energiák összegeként képzeljük el! Ezeket a diszkrét cellákat kicsinyítjük, hogy folyamatos legyen.

$E_n = n\varepsilon_1$ n: egész szám n= 0,1,2,.........

Ha ε_0 tartana a 0-hoz, akkor visszakapnánk a folytonos energia esetét. Mindig ezt csináljuk a klasszikus statisztikában.

$$N(\varepsilon_n) = N_0 e^{-\frac{n\varepsilon_1}{kT}}$$

Képezzük a nevezőt!

$\bar{\varepsilon}$ nevezője:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(\varepsilon_n) = N_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \right) = \frac{N_0}{1 - e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}}$$

Bevezetem a $\xi = -\frac{1}{kT}$ változót.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} N_0 e^{n\varepsilon_1\xi} = \frac{N_0}{1 - e^{\varepsilon_1\xi}}} \qquad 1.$$

Ezt deriváljuk ξ szerint:

$$\boxed{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} N_0 e^{n\varepsilon_1\xi} n\varepsilon_1} = \frac{N_0 e^{\varepsilon_1\xi}\varepsilon_1}{\left(1 - e^{\varepsilon_1\xi}\right)^2}} \qquad 2.$$

$n\varepsilon_1$: energia

$\downarrow$

$\bar{\varepsilon}$ számlálója

Az 1.-t és a 2.-t visszahelyettesítjük:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{N_0 \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1\xi}\left(1 - e^{\varepsilon_1\xi}\right)}{\left(1 - e^{\varepsilon_1\xi}\right)^2 N_0} = \frac{\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1\xi}}{1 - e^{\varepsilon_1\xi}} = \frac{\varepsilon_1}{e^{-\varepsilon_1\xi} - 1}$$

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1}{e^{\frac{\varepsilon_1}{kT}} - 1}}$$

Kijön-e a klasszikus fizika eredménye? (Azaz ha $\varepsilon_1 \to 0$)

$$e^{\frac{\varepsilon_1}{kT}} = 1 + \frac{\varepsilon_1}{kT} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\varepsilon_1}{kT}\right)^2 + \ldots \quad \text{sorfejtés}$$

$$\bar{\varepsilon} \to \frac{\varepsilon_1}{1 + \frac{\varepsilon_1}{kT} + \ldots - 1} = kT$$

Ha a feltételezett ugrások kicsik, akkor visszakapjuk a klasszikus fizika eredményét.

$\varepsilon_1 \to 0$ - ebbe kötött bele Planck. Planck feltételezése:

Az átadható energiaadag egy véges érték egész számú többszöröse.

$\varepsilon_1 \to 0$ annál inkább téves , minél nagyobb a frekvencia. Tehát kézenfekvő, hogy

ε_1=h$\cdot\nu$

Planck bevezetett egy új változót: ez a h - Planck állandó

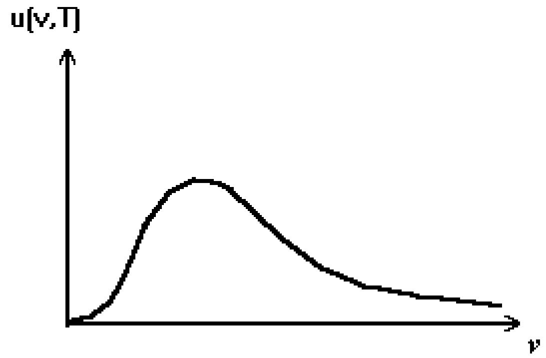
A kísérleti adatokkal akkor a legjobb az egyezés, ha $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Js
Az adag neve idegen szóval kvantum.

Behelyettesítünk:

$$u(\nu,T)= K\cdot\nu^2\cdot\bar{\varepsilon} = K\cdot\nu^2\cdot\frac{h\cdot\nu}{e^{\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}-1}$$

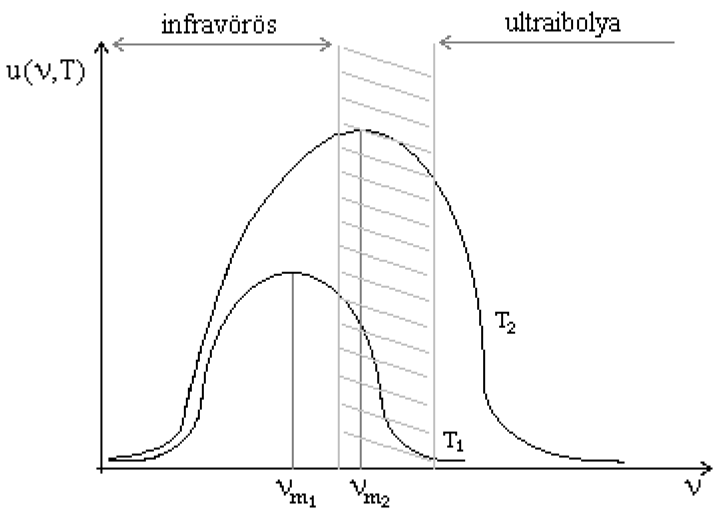
$$u(\nu,T)=K\cdot\frac{h\cdot\nu^3}{e^{\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}-1}$$

Ez a Planck-féle sugárzási törvény



A Planck-féle sugárzási törvényből integrálással levezethető a Stefan-Boltzmann törvény, deriválással a Wien törvény.

Megjegyzés: a fényforrások hatásfoka



T_1=3000 K T_2=6000 K

T1-nél láthatóra esik 5%
T2-nél láthatóra esik 39%

Célszerű a 6000 K hőmérsékletű fényforrást használni, körülbelül ennek a hatásfoka optimális. A Nap optimális fényforrás, pontosan 6000 K-es.

A 3000 K hőmérsékletű fényforrások (pl. izzólámpák) főleg hőt bocsátanak ki.

Összefoglalva:

$\bar{\varepsilon} = \dfrac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}} - 1} \rightarrow$ kT ha T$\rightarrow \infty$ és ν állandó vagy $\nu \rightarrow 0$ és T állandó

$\downarrow$

0 ha $\nu \rightarrow \infty$ és T állandó vagy T$\rightarrow$0 és ν állandó

A nagyfrekvenciás módusok általában nem léteznek.