Hullámtani összefoglaló

A hullám fogalma és leírása

A *hullám* valamilyen (mechanikai, elektromágneses, termikus, stb.) zavar térbeli tovaterjedése. Terjedésének mechanizmusa függ a zavar jellegétől, így például a mechanikai deformáció az anyag részei közti rugalmas kapcsolatok miatt terjed, az elektromágneses zavar terjedése a változó mágneses- és elektromos tér egymást létrehozó hatásán alapul, a termikus zavar terjedésének oka az anyag hővezetése, stb.

A hullám általános leírása, a hullámfüggvény

A terjedő zavar adott helyen valamilyen mennyiség időbeli változását jelenti, adott időpillanatban pedig a mennyiség pillanatnyi értéke helyről-helyre más. Emiatt a hullám leírására *helytől és időtől függő* ún. *hullámfüggvény* szükséges. Ha a zavar a ψ-vel jelölt mennyiség változásának tovaterjedésével jár, akkor a zavarterjedés leírására használt hullámfüggvény általános matematikai alakja $\psi = \psi(\mathbf{r},t)$ ($\mathbf{r}$ annak a pontnak a helyvektora, ahol a zavart vizsgáljuk, t az idő). A zavar lehet vektor-jellegű, amelynek iránya van (pl. elmozdulás), ilyenkor ψ a vektor nagyságát, vagy egyik komponensét jelöli, de lehet skaláris is (pl. hőmérsékletváltozás)

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk egy irányban (pl. az x tengely mentén) terjedő zavart (*egydimenziós zavarterjedés*). Ha az $x = 0$ helyen (például a zavar forrásánál) a zavar időbeli változása

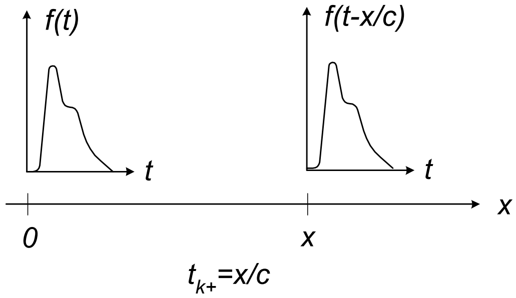
$$\psi(0,t) = f(t),$$

és a zavar adott c sebességgel terjed a térben, akkor a zavar egy pozitív x helyre

$$t_{k+} = \frac{x}{c}$$

egy negatív x helyre

$$t_{k-} = -\frac{x}{c}$$



késéssel érkezik meg, így az x helyen a zavar időbeli változását a

$$\psi_{\mp}(x,t) = f(t \mp \frac{x}{c})$$

hullámfüggvény írja le (a "-" jel az x-tengely pozitív-, a "+" jel az x-tengely negatív irányában terjedő hullámot jelent). Ez a hullámfüggvény általános alakja, amely konkrét zavarterjedés esetén meghatározott függvényalakot ölt.

A hullámok változatos formái közötti eligazodás kedvéért célszerű a hullámokat csoportosítani. Ezt többféle szempont szerint tehetjük meg, amik közül a legfontosabbak a következők.

A hullám lehet

a terjedés térbeli viszonyai szerint:

- egydimenziós (pl. rugalmas zavar kötélen)
- kétdimenziós (pl. hullám vízfelületen)
- háromdimenziós (ez a leggyakoribb, pl. hang terjedése egy teremben).

a terjedés és a zavar irányának viszonya szerint:

- transzverzális hullám (a zavart jellemző vektor iránya merőleges a terjedés irányára, pl. egy húrra merőleges kitérés terjedése a húr mentén)
- longitudinális hullám (a zavart jellemző vektor iránya párhuzamos a terjedés irányával, pl. egy rugó hosszirányú összenyomásával keltett zavar terjedése a rugó mentén).

a zavar azonos értékeinek megfelelő (azonos fázisban lévő) pontok elhelyezkedése szerint:

- síkban terjedő hullámoknál az azonos fázisú helyek egy vonalon vannak, és a hullámokat a vonal alakja szerint is lehet csoportosítani: pl. egyenes hullám, körhullám (utóbbira példa egy vízfelületen egy pontban keltett hullámok terjedése),
- háromdimenziós hullámoknál az azonos fázisú helyeknek megfelelő felületek alakja szerint beszélünk síkhullámról, hengerhullámról, gömbhullámról,
- a vonal- és síkhullám terjedése egyetlen (az azonos fázisú vonalakra, illetve síkokra merőleges) koordinátával leírható, a kör-, henger- és gömbhullámok a forrástól távol közelítőleg egyenes- illetve síkhullámnak tekinthetők.

A harmonikus hullám fogalma és jellemzői

Ha a terjedő zavar időben koszinusz illetve szinusz függvény szerint változik (harmonikus rezgés), akkor – egydimenziós terjedés esetén – a zavarterjedést leíró függvény is ilyen lesz, tehát egy *A* amplitúdójú, ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés *c* sebességgel történő terjedése a

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \alpha\right]$$

hullámfüggvénnyel írható le, ahol α fázisállandó. Az ilyen – állandó amplitúdójú – hullámot *harmonikus hullámnak* nevezzük.

A harmonikus hullám tulajdonságainak megismerésével tetszőleges hullám leírható, mert tetszőleges zavar terjedése felfogható harmonikus hullámok szuperpozíciójaként.

A harmonikus hullám terjedésének fontos jellemzője egy kiválasztott fázisú (pl. a zavar maximális értékének megfelelő) hely haladási sebessége a hullámban, amit a hullám *fázissebességének* nevezünk. Ennek kiszámításához felhasználjuk, hogy adott fázisú hely *x* koordinátája adott *t* időben olyan helyen van, amelyre

$$\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \alpha = \acute{a}lland\acute{o}.$$

Az összetartozó *x*-*t* értékpárokra ebből kapjuk:

$$x = \mp\frac{c(\acute{a}lland\acute{o} - \alpha)}{\omega} \pm ct$$

Az azonos fázisú helyek sebessége eszerint

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \pm c\,,$$

ahol a "+" jel a pozitív *x* irányban, a "-" jel a negatív *x* irányban haladó hullámra érvényes. A fázissebesség tehát azonos a korábban "zavarterjedési sebesség"-ként bevezetett mennyiséggel.

Megjegyezzük, hogy egy nem harmonikus zavar (pl. egy rövid pulzus, amit néha hullámcsomagnak neveznek) különböző frekvenciájú harmonikus hullámok szuperpozíciójának tekinthető, vagyis benne különböző frekvenciájú harmonikus hullámok terjednek. Gyakran előfordul, hogy a hullám terjedési sebessége függ a

frekvenciától, így az összetevő hullámok fázissebessége eltérő (a jelenséget diszperziónak nevezik). A zavar terjedési sebessége ilyenkor az ún. *csoportsebesség*gel egyezik meg.
A hullám másik fontos jellemzője a *hullámhossz,* ami az adott t időpillanatban azonos fázisban lévő *szomszédos* pontok távolsága, jelölése λ. Ezt annak felhasználásával kaphatjuk meg, hogy az azonos fázisban lévő helyeken a hullámfüggvény értéke azonos:

$$\psi(x,t)=\psi(x+d_n,t).$$

Ez a harmonikus hullámban a koszinusz függvény argumentumára azt jelenti, hogy

$$\omega\left(t-\frac{x+d_n}{c}\right)+\alpha-\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\alpha=n2\pi$$

(n egész szám). Ebből

$$d_n=n\frac{2\pi c}{\omega}=ncT.$$

A hullámhossz pedig:

$$\lambda=d_1=cT.$$

A hullámhosszal összefüggő, gyakran használt mennyiség a *hullámszám* (k), aminek definíciója:

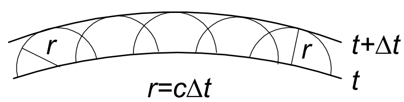
$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c}$$

Ezzel az egydimenziós harmonikus hullám egyenlete átírható az alábbi alakba:

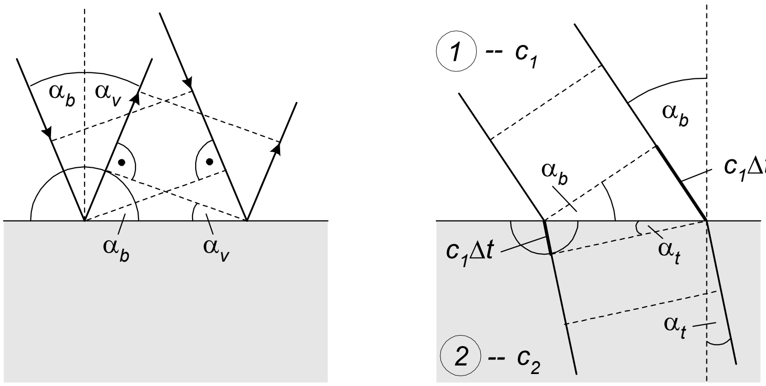
$$\psi(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\alpha).$$

Hullámok visszaverődése és törése, a Huygens-elv

A hullám terjedésére vonatkozó fenti fogalmak akkor használhatók, ha a hullám homogén közegben, állandó sebességgel terjed. Ha egy hullám egy közeg határához ér, akkor a tapasztalat szerint onnan részben visszaverődik, részben pedig behatol a szomszédos közegbe. A hullám terjedésében mindkét esetben változások állnak be.
A határon visszaverődő és áthaladó hullámok a határfeltételektől függő fázisváltozást szenvedhetnek a beeső hullámhoz képest (pl. rögzített kötélvégről visszaverődő hullámban a kitérésnek a határon a beeső hullámmal ellentétesnek kell lennie a beeső hulláméval – a fázisváltozás π – mert csak így maradhat ott mindig nulla a kitérés). A határfelületen, nem merőleges beesésnél, általában a hullám terjedési iránya is megváltozik. Ha a hullám egyik közegből átmegy egy másikba, akkor a terjedés körülményei is megváltoznak, és például más lesz a hullám terjedési sebessége.
A visszaverődésnél és törésnél bekövetkező irányváltozás törvényei megérthetők a Huygens-elv alapján. Eszerint egy hullámfront (az a vonal vagy felület, ameddig a hullám eljutott) minden pontjából elemi hullámok indulnak ki, és ezek burkológörbéje adja meg a Δt idővel későbbi hullámfrontot (ábra).



Ennek felhasználásával a hullámok visszaverődésénél és törésénél tapasztalt törvényszerűségek egyszerűen megmagyarázhatók az alábbi ábrák segítségével.
A visszaverődést az *a)* ábrán láthatjuk, ahol egy felületre, a felület normálisával α_b szöget bezáró irányban egy síkhullám érkezik. Ezt abban a pillanatban ábrázoltuk, amikor a hullámfront egy pontja éppen eléri a felületet. Az ábrán Δt idő múlva (amikor a hullámfront egy másik, kiszemelt pontja is elérte a felületet) megszerkesztettük a visszavert hullám hullámfrontját a Huygens-elv segítségével. A hullám haladási iránya a visszaverődés után a



a) b)

felület normálisával α_v szöget zár be. Az ábráról leolvasható, hogy a beeső és visszavert hullám haladási iránya szimmetrikus a beesési merőlegesre, vagyis

$$\alpha_b = \alpha_v$$

A *b)* ábrán az *1* közegbe beeső hullám átmegy a *2* közegbe, ahol haladási irányát a felület normálisával bezárt α_t törési szöggel adjuk meg. A két közegben a hullám terjedési sebessége eltérő: c_1 és c_2. Az új hullámfrontot most a *2* közegben szerkesztettük meg, és ebből kiderül, hogy az új közegbe behatoló (a határfelületen átmenő) hullám törésére érvényes a

$$\frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_t} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}$$

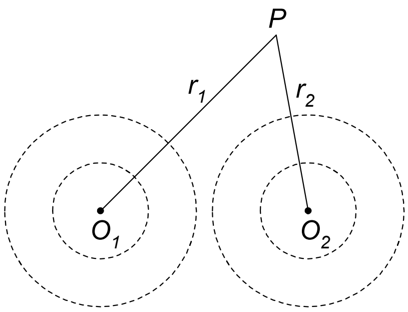
összefüggés. Az így bevezetett n_{21} mennyiség a *2* közegnek az *1* közegre vonatkozó törésmutatója.

Hullámok találkozása, interferencia

Ha a tér egy pontjában két hullám van jelen, akkor hatásuk ott valamilyen módon összegződik. A hullámok összeadódását *interferenciának* nevezzük. Mi az interferencia eredménye?

Ha a szuperpozíció elve érvényes az adott esetben (és szélsőséges esetektől eltekintve érvényes), akkor a két hullámfüggvény egyszerűen összeadható:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_1(\mathbf{r},t) + \psi_2(\mathbf{r},t)\,.$$



Általános következtetésekre is alkalmas példaként vizsgáljuk meg két pontforrásból induló (ábra), azonos frekvenciájú, kétdimenziós hullám (pl. vízhullámok) interferenciáját. A két hullám hullámfüggvénye:

$$\psi_1(r_1,t) = A_1\cos(\omega t - kr_1)$$

$$\psi_2(r_2,t) = A_2\cos(\omega t - kr_2 + \alpha)$$

Az eredő hullám a *P* pontban a szuperpozíció elve szerint:

$$\psi(P,t) = \psi_1(r_1,t) + \psi_2(r_2,t)\,.$$

Az eredő hullám áttekinthetőbb alakban írható fel, ha felhasználjuk a rezgések összegzésénél használt összefüggést:

$$A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

ahol

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Most a $\varphi_1 = -kr_1$, $\varphi_2 = -kr_2 + \alpha$ fázisszögek adott helyen állandók, így φ is az.
Ezzel az eredő hullám:

$$\psi(P,t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(kr_1 - kr_2 + \alpha)} \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

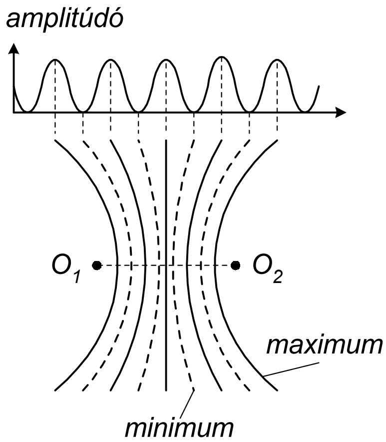
A P pontban tehát ω frekvenciájú harmonikus rezgőmozgás lesz (a kifejezés második tényezője), amelynek az amplitúdója (az első tényező) azonban a helytől függ.
Az amplitúdó maximális lesz akkor, ha a négyzetgyök alatti kifejezés maximális, vagyis ha a *cos* értéke éppen $+1$. Ebből következik, hogy $A_{max} = A_1 + A_2$ maximális amplitúdó ott alakul ki, ahol a két hullám $\delta = r_1 - r_2$ útkülönbsége:

$$\delta_{max} = \pm n\lambda - \frac{\alpha}{2\pi}\lambda,$$

a minimális $A_{min} = A_1 - A_2$ amplitúdó pedig azokon a helyeken jön létre, ahol

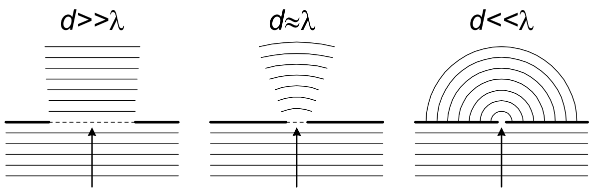
$$\delta_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{\pi}\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...).$$

A fenti egyenletekből látni, hogy ha az α fáziskülönbség időben állandó – azaz a két hullám koherens – akkor a maximális és minimális amplitúdójú helyek egy-egy időben állandó helyzetű hiperbola-seregen helyezkednek el (vízhullámok esetén ezek láthatók is). Az amplitúdó helyfüggése a két hullámforrást összekötő egyenessel párhuzamos bármely egyenes mentén maximumok és minimumok sorozatát mutatja (ábra).
Koherens hullámok interferenciájánál általánosan is igaz, hogy az interferencia jellegzetes térbeli amplitúdó-eloszlást ún. *interferenciaképet* eredményez. Ez a hullámok egyik legjellegzetesebb tulajdonsága.



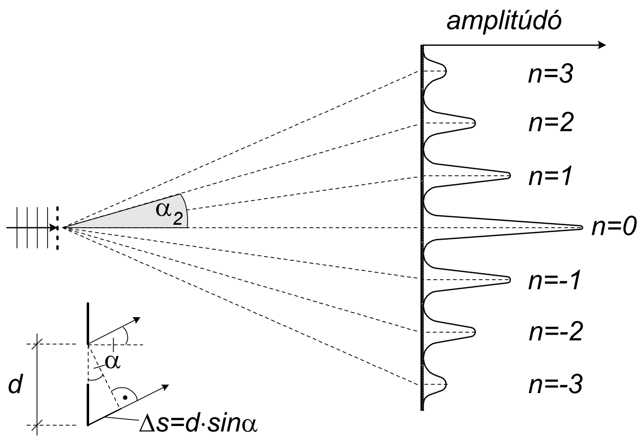
Hullámelhajlás, a Huygens–Fresnel-elv

Ha egy hullám réseken halad át vagy akadályok szélénél halad el, akkor olyan jelenségek figyelhetők meg, amelyek a Huygens-elvvel nem értelmezhetők, ezek az ún. *elhajlásjelenségek*. A mellékelt ábrán bemutatunk néhány ilyen esetet.
Az itt látható esetek közül kizárólag a pontszerű rés esete értelmezhető a Huygens-elvvel. Az árnyékjelenség és a hullám részleges behatolása az árnyéktérbe csak úgy magyarázható, ha az új hullámfrontot nem az elemi hullámok burkolójaként értelmezzük, hanem az *elemi hullámok interferenciájából* számítjuk ki. Ez a *Huygens–Fresnel-elv*. Ilyen számításokból kiderül, hogy az árnyékjelenség oka az, hogy az elemi hullámok a rés túloldalán az "árnyéktérben" – a rés méretétől függő mértékben – kioltják egymást.



Gyakorlatilag is fontos eset a hullámelhajlás rácson, amikor a hullám rések sorozatán – ún. *rácson* – halad át. Ilyenkor a rések különböző pontjaiból kiinduló elemi hullámok bizonyos irányokban erősítik, más irányokban gyengítik egymást, és a rács mögött a ráccsal

párhuzamos irányban haladva az amplitúdó (és a hullám intenzitása, ami arányos az amplitúdó négyzetével, *l.* alább) maximumokon és minimumokon megy át (ábra).
A maximumok α_n irányai úgy kaphatók meg, hogy ezekben az irányokban a rések azonos helyeiről (pl. a rések tetejéről) kiinduló hullámok páronként erősítik egymást, tehát a $\Delta s = d \sin\alpha_n$ útkülönbségükre érvényes, hogy $\Delta s = n\lambda$. Ezért a maximumok irányaira azt kapjuk, hogy



$$d \sin\alpha_n = n\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Az összefüggésből a rácsállandó (*d*) ismeretében a hullámhossz meghatározható. A rácson való elhajlás a hullámok jellegzetes viselkedése. Előfordul, hogy egy jelenség hullámtermészetének bizonyítékául éppen az szolgál, hogy megfelelő rácson elhajlást mutat.

A hullámterjedés dinamikai leírása, a hullámegyenlet

A hullám leírása akkor teljes, ha a hullámfüggvényt a hullámot létrehozó hatások segítségével le tudjuk vezetni, azaz ismerjük a hullámfüggvény meghatározására szolgáló fizikai egyenletet. Ez a *hullámegyenlet*, amelyet mechanikai hullámok esetén a hullámban elmozduló közeg térfogatelemére felírt mozgásegyenlet segítségével, elektromágneses hullámoknál pedig az elektromágnességtan alapegyenleteiből (Maxwell-egyenletek) kaphatunk meg. Itt részletesebben csak a mechanikai hullámokkal foglalkozunk.

Hullámegyenlet mechanikai hullámok esetén

A hullámegyenlet levezetésének alapelve az, hogy a közeg elemi darabjára felírjuk a mozgásegyenletet, és a mennyiségeket a hullámfüggvénnyel fejezzük ki. Ekkor a hullámfüggvényre vonatkozó differenciálegyenletet kapunk.
Példaként *S* keresztmetszetű rugalmas rúdban *x*-irányban terjedő egydimenziós longitudinális hullámra végezzük el a számolást. A mozgásegyenlet egy *dm* tömegű térfogatelemre

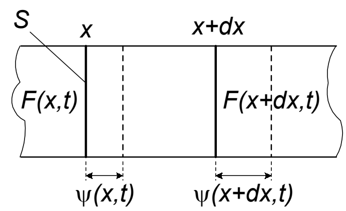
$$dF = dm \cdot a_x$$

A rúd elemi darabjára ható *dF* erő a Hooke-törvény segítségével fejezhető ki az elmozdulást megadó hullámfüggvénnyel. Ehhez először írjuk fel az elemi darab ε deformációját (ábra), ami a

$$d\psi = \psi(x+dx,t) - \psi(x,t).$$

hosszváltozás és az eredeti *dx* hossz hányadosa, vagyis

$$\varepsilon = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$$



A Hooke törvény szerint az erő és a deformáció arányos egymással:

$$F(x,t) = SE\varepsilon(x,t) = SE\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}.$$

Az elemi darabra ható erő adott időpillanatban

$$dF = dF_{|t} = F(x+dx,t) - F(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx ,$$

ami az erő kifejezése alapján:

$$dF = SE \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} dx .$$

A gyorsulás a helykoordináta (itt a hullámfüggvény) második időderiváltja, azaz

$$a_x = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} .$$

A vizsgált térfogatelem tömege a ρ sűrűséggel kifejezve:

$$dm = Sdx\rho .$$

Így a $dF = dm \cdot a_x$ mozgásegyenlet a hullámfüggvénnyel kifejezve:

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} .$$

Ez a hullámterjedést leíró hullámegyenlet a vizsgált esetben. Ennek megoldása a harmonikus hullámot leíró

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

hullámfüggvény is. Behelyettesítés után kapjuk, hogy ez a függvény akkor megoldás, ha a terjedési sebesség

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} .$$

A vizsgált esetben tehát a hullámegyenlet a

$$c^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakba írható.

Kimutatható, hogy ez az alak nem csak a fenti speciális esetben érvényes, hanem ez az *egydimenziós hullámegyenlet általános alakja.*

Konkrét hullámterjedés vizsgálatánál a hullámegyenlet levezetése során mindig megkapjuk a terjedési sebesség kifejezését az adott esetben. Így pl.

Transzverzális hullám megfeszített húrban: $c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$ (F a húzóerő, S a húr keresztmetszete).

Nyomás- és sűrűséghullám gázban: $c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$ (K a kompressziómodulus, ρ_0 az átlagos sűrűség).

Nyírási hullám rugalmas rúdban: $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ (G a nyírási modulus)

Gázban és folyadékban gyakorlatilag csak longitudinális hullámok terjednek (nyírófeszültség nem ébred bennük). Szilárd anyagokban longitudinális és transzverzális hullámok is terjednek, és terjedési sebességük eltérő: általában a longitudinális hullámok terjednek gyorsabban.

Hullámegyenlet elektromágneses hullámokra

A Maxwell-egyenletekből levezethető, hogy a hullámegyenlet fenti általános alakja elektromágneses hullámok esetén is érvényes, csak ekkor ψ helyébe az elektromos térerősség (**E**) illetve a mágneses indukció (**B**) vektor megfelelő komponensei kerülnek, a c terjedési sebesség pedig a *fénysebesség*. Ebben a hullámban a mágneses-és elektromos tér egymással azonos fázisban változik, és egymásra merőlegesek. Így pl. x-irányban haladó síkhullám esetén az y-tengelyt az elektromos tér irányában felvéve, a mágneses indukció z-irányú lesz, és a hullámot leíró egyenletek:

$$c^2 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2},$$

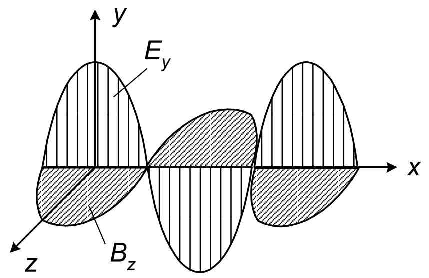
$$c^2 \frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial t^2}.$$

A levezetés során kiderül, hogy az elektromágnenses hullám terjedési sebessége $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$.

A fenti hullámegyenletnek megfelelő harmonikus hullámban az elektromos- és mágneses tér változásait az alábbi hullámfüggvények adják meg:

$$E_y(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$B_z(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx).$$



A két térmennyiség pillanatnyi értékeit az x-tengely mentén az ábra mutatja.
Mivel a hullám mind az elektromos- mind pedig a mágneses tér irányára merőlegesen terjed, a hullám terjedési irányát az $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ vektor iránya adja meg.

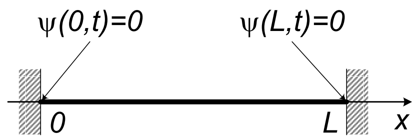
Állóhullámok

Véges közegben a hullám visszaverődik a közeg határáról, ezért a forrásból kiinduló és a visszavert hullámok találkoznak és interferálnak. Az interferencia eredménye általában bonyolult, időben változó hullámalakzat. A tapasztalat szerint azonban harmonikus hullámok esetén bizonyos feltételek teljesülésekor (pl. egy kötélben indított hullámnál meghatározott frekvenciákon) sajátos, a haladó hullámtól különböző, állandósult hullámalakzatok jöhetnek létre, amelyekben a hullámtér egész tartományai azonos fázisban rezegnek, csak a rezgés amplitúdója változik helyről-helyre. Az ilyen hullámalakzatot *állóhullámnak* nevezik.
Az állóhullám jellemzői a tapasztalat szerint:

- helyfüggő amplitúdó
- nagyobb térrészre kiterjedő, azonos fázisú rezgés

Mivel a hullámegyenlet elvileg minden hullámjelenséget leír, véges közeg esetén az állóhullámnak is ki kell jönni az egyenletből.

Egyszerű példaként próbáljuk megoldani a hullámegyenletet egy mindkét végén rögzített, L hosszúságú rugalmas húrban terjedő transzverzális harmonikus hullámra (ábra).



Ha a közeg véges, akkor az egyenlet megoldásánál ezt figyelembe kell venni, ami a határfeltételek megadásával történik. Esetünkben a határfeltételek:

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0.$$

Meg kell adni még a kezdeti feltételeket is (a húr kezdeti alakját és pontjainak kezdeti sebességét):

$$\psi(x,0)=f(x) \quad \text{és}$$

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x).$$

Az f és g függvények adottak.
Keressük az állóhullámokra vonatkozó tapasztalatok alapján a

$$c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

hullámegyenlet megoldását az

$$\psi(x,t)=\varphi(x)\cdot cos(\omega t+\alpha)$$

alakban (helyfüggő amplitúdó, helyfüggetlen fázis).
Behelyettesítve a hullámegyenletbe, az időfüggő rész kiesik, az amplitúdó helyfüggésére pedig az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+k^2\varphi(x)=0$$

Ez az egydimenziós *állóhullám-egyenlet*.
Mivel az egyenlet formailag teljesen azonos a harmonikus rezgőmozgás egyenletével, megoldása is ugyanaz, csak most a változó nem t, hanem x:

$$\varphi(x)=A\,sin(kx+\varphi).$$

A $\psi(0,t)=0$ határfeltétel miatt $\varphi=0$, így

$$\varphi(x)=A\,sin(kx).$$

A $\psi(L,t)=0$ határfeltétel miatt viszont k értéke nem lehet tetszőleges, hanem csak a

$$k_n=n\frac{\pi}{L}$$

értékeket veheti fel (n egész szám).
Ezzel a hullámegyenlet n-től függő megoldása:

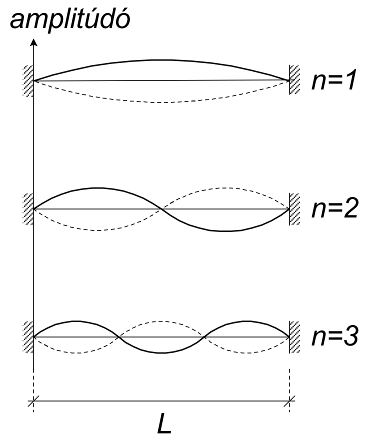
$$\psi_n(x,t)=A\,sin(n\frac{\pi}{L}x)cos(\omega t+\alpha).$$

A határfeltételek miatt a húron kialakuló hullámok frekvenciája és hullámhossza sem tetszőleges, hanem

$$\omega_n=k_nc=n\frac{\pi}{L}c \;\; illetve \;\; \lambda_n=\frac{2L}{n}.$$

Az állóhullám legjellegzetesebb sajátsága az amplitúdó helyfüggése:

$$\varphi_n(x)=A\,sin\,n\frac{\pi}{L}x.$$



A húron az n-től függő számú maximális amplitúdójú ún. *duzzadóhely* és nyugalomban lévő hely – ún. *csomópont* – jön létre, a csomópontok közötti részek azonos fázisban rezegnek. Néhány ilyen jellegzetes állóhullám-kép látható a mellékelt ábrán, a mindkét végén rögzített húr esetén.
Megjegyzés: a fenti, egyetlen n értékhez tartozó megoldás csak igen speciális kezdeti feltételek mellett valósítható meg (harmonikus gerjesztés). Általában egy húr gerjesztésekor bonyolult hullám alakul ki, amely különböző frekvenciájú harmonikus hullámok szuperpozíciója, így az $n = 1$ értékhez tartozó alapfrekvencia (alaphang) mellett – rendszerint kisebb intenzitással – egyéb lehetséges frekvenciák (az ún. felharmonikusok) is megjelennek.
A fentihez hasonló módon tárgyalhatók egyéb peremfeltételek is (pl. egyik végén szabad kötél, zárt és nyitott síp (levegőoszlop), stb.

A két- vagy háromdimenziós hullámegyenlettel síkon vagy térben terjedő hullámok által létrehozott állóhullámok is tárgyalhatók.
Elektromágneses hullámok esetén is hasonló az eljárás, csak az elektromágneses hullámra érvényes peremfeltételeket kell alkalmazni.

Energiaterjedés hullámban

A hullámban energia terjed. Mechanikai (rugalmas) hullám esetén ez a hullámban terjedő rezgés, elektromágneses hullámban pedig a létrehozott elektromágneses tér energiájaként jelenik meg. Részletesebben itt egy longitudinális rugalmas hullám esetét vizsgáljuk meg, a kapott eredmények azonban általánosan érvényesek.

Energiaterjedés rugalmas hullámban

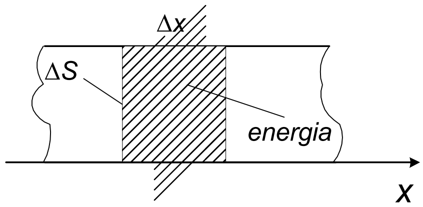
Az energia kiszámításához ismét egy elemi térfogatot választunk ki. A térfogatelem mechanikai energiája a mozgási és helyzeti energia összege, ezért először ezeket írjuk fel:

$$\Delta E_m = \tfrac{1}{2}\Delta m v^2 = \tfrac{1}{2}\rho\Delta x\Delta S\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\Delta V$$

$$\Delta E_h = \tfrac{1}{2}E\varepsilon^2\Delta x\Delta S = \tfrac{1}{2}E\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\Delta V$$

(ρ az anyag sűrűsége, E a Young-modulus).
Felhasználva a longitudinális rugalmas hullám terjedési sebességére vonatkozó

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \rightarrow \qquad E = \rho c^2$$



összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\Delta E_h = \tfrac{1}{2}\rho c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\Delta V\,.$$

Az összenergia pedig

$$\Delta E = \Delta E_m + \Delta E_h = \tfrac{1}{2}\rho\Delta V\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Az energia térfogati sűrűsége:

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \tfrac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Harmonikus hullám esetén

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha),$$

ezért az energiasűrűség:

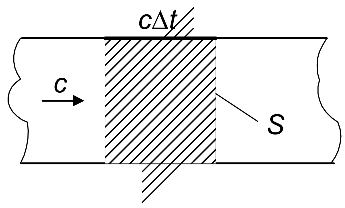
$$w = \tfrac{1}{2}\rho\left[\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + c^2k^2A^2\sin^2(\omega t - kx + \alpha)\right].$$

Felhasználva az $\omega = kc$ összefüggést, az energiasűrűségre azt kapjuk, hogy

$$w = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \alpha).$$

Az energiasűrűség adott helyen időben periodikusan változik, adott időpillanatban pedig a helynek periodikus függvénye.
A hullámmal adott x helyen áthaladó energiasűrűség időbeli átlaga:

$$w_{\ddagger tl} = \frac{1}{T}\int_0^T w(x,t)dt = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2\,.$$



Az ennek megfelelő energiaáram úgy kapható meg, hogy kiszámítjuk adott S felületen, a felületre merőlegesen Δt idő alatt áthaladó energiát:

$$\Delta E = c\Delta t S w .$$

Az átlagos energiaáram ezzel

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t} = cSw = \tfrac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 cS ,$$

amit gyakran a hullám *intenzitásá*nak neveznek.
Ennek alapján az átlagos energia-áramsűrűség

$$j = \frac{I}{S} = \tfrac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 c ,$$

azaz

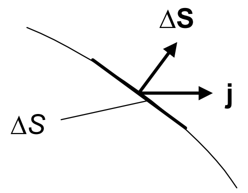
$$j = wc .$$

Mivel az áramsűrűség és a terjedési sebesség iránya azonos, az áramsűrűség vektori formában az alábbi módon adható meg:

$$\mathbf{j} = w\mathbf{c} .$$

Az átlagos energiasűrűség ennek alapján

$$\mathbf{j}_{‡tl} = w_{‡tl}\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \mathbf{c} .$$



Ha egy olyan felületen átmenő energiaáramot akarjuk kiszámítani, amely a terjedési sebességre nem merőleges, akkor egy elemi ΔS felületen átmenő energiaáram

$$\Delta I = \mathbf{j}\Delta\mathbf{S} ,$$

ahol $\Delta\mathbf{S}$ a felületvektor. Véges S felületen átmenő energiaáram pedig

$$I_S = \int_S \mathbf{j}d\mathbf{S} .$$

Energia-áramsűrűség elektromágneses hullámban

A fenti általános formulák érvényesek elektromágneses hullámra is, csak ekkor az itt érvényes energiasűrűség kifejezést kell alkalmazni, ami vákuumban

$$w_{elm} = \varepsilon_0 E^2$$

(itt E az elektromos térerősség!).
Mivel

$$E^2 = c\left|\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right| ,$$

az áramsűrűség az alábbi alakba írható:

$$\mathbf{j}_{elm} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}\times\mathbf{B} .$$

Az $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ vektort, amely az energia terjedési irányát mutatja meg, *Poynting-vektornak* nevezik.

Az energiaáramsűrűség- és az amplitúdó térbeli változása egyszerű esetekben

Az energia-áramsűrűség és ezzel együtt a hullám amplitúdója változhat geometriai okokból és a közegben történő energiaveszteségek (elnyelés) miatt.

Amplitúdócsökkenés gömbhullámban

Pontforrásból kiinduló hullám esetén mindig fellép egy geometriai jellegű áramsűrűség-változás, aminek az az oka, hogy ugyanaz az energiaáram a terjedés során egyre nagyobb felületen oszlik el.
Gömbhullám esetén a forrásból kisugárzott állandó I_0 energiaáramot (intenzitást) és homogén, izotróp közeget feltételezve, a forrástól r távolságban lévő helyen az áramsűrűség és az áram összefüggése:

$$I_0 = j4r^2\pi \ .$$

Mivel elnyelést nem tételezünk fel, az áramsűrűségnek, és így a hullám amplitúdójának az

$$I_0 = j(r)4r^2\pi = \tfrac{1}{2}\rho A^2(r)\omega^2 c4r^2\pi = \acute{a}lland\acute{o}$$

összefüggés miatt a forrástól mért r távolsággal fordított arányban kell változnia:

$$A(r) \propto \frac{1}{r}.$$

Hasonló meggondolásokkal kapjuk, hogy egy pontforrásból kiinduló felületi körhullámban (pl. vízhullám) az amplitúdó helyfüggése

$$A(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

jellegű.

Amplitúdócsökkenés elnyelés miatt
Az áramsűrűség változásának másik lehetséges oka, hogy a közeg a hullám energiájának egy részét elnyeli. Ilyenkor maga az energiaáram, azaz a hullám intenzitása is változik. Ha az enrgiaveszteség nem túl nagy, akkor egy x-irányban terjedő síkhullámban dx hosszúságú szakaszon való áthaladás közben az intenzitás változása arányos a szakasz hosszával és az eredeti intenzitással:

$$dI = I(x+dx) - I(x) = -\mu I dx \ .$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx \ ,$$

$$I(x) = I_0 \ exp(-\mu x)$$

(I_0 az intenzitás az $x = 0$ helyen).
Mivel az intenzitás arányos az amplitúdó négyzetével, ez azt jelenti, hogy a hullám amplitúdója az elnyelés következtében az alábbi módon csökken:

$$A(x) = A_0 \ exp(-\frac{\mu}{2}x) = A_0 \ exp(-\beta x).$$

(Itt bevezettük a $\beta = \mu/2$ jelölést.)

Hanghullámok keletkezése és terjedése

A hanghullám valamilyen közegben terjedő rugalmas hullám. A hullám frekvenciája szerinti felosztás:
20 Hz alatt: *infrahang*
20 Hz és 16kHz között: *hallható hang*
16 kHz és 10^8 Hz között *ultrahang*
10^8 Hz felett: *hiperhang.*

Hangforrások

A hang forrása mindig rezgő test. A gyakorlatban hangforrásként legtöbbször húrt, pálcát, lemezt, gázoszlopot használnak, amelyben egy rezonanciafrekvencián állóhullámokat hoznak létre. A hullám forrásaként szolgáló mechanikai rezgést közvetlenül mechanikus úton vagy közvetett módon elektromágneses rezgés segítségével állíthatjuk elő.

Az ultrahangok előállításában és érzékelésében igen fontos szerepet játszanak az ún. piezoelektromos anyagok (pl. kvarckristály, bizonyos kerámiák). Ezekben az anyagokban külső mechanikai feszültség (deformáció) hatására elektromos polarizáció (P) jön létre. Ha egy ilyen anyagból olyan lapkát vágunk ki, amelynek nagy lapjai (A) a létrejött polarizáció irányára merőlegesek, és ezekre elektródokat viszünk fel, akkor a deformáció hatására ezeken a lapokon felületi töltés (a töltéssűrűség σ) jelenik meg. Az elektródokat áramkörbe kapcsolva, a körben mechanikai feszültség (deformáció) hatására elektromos áram jön létre:

$$\textit{mechanikai behatás} \Rightarrow \Delta P \Rightarrow \Delta\sigma \Rightarrow \Delta Q / A \Rightarrow I_P = A\frac{\Delta P}{\Delta t}.$$

A tapasztalat szerint a létrejött polarizáció – és így az elektromos áram is – arányos a mechanikai feszültséggel (deformációval). Ez a jelenség a (direkt) piezoelektromos effektus.

A jelenség megfordítása is létezik: ha egy megfelelően kivágott piezoelektromos lapkára elektromos teret (feszültséget) kapcsolunk, akkor a lapkában deformáció jön létre. Ez az ún. inverz piezoelektromos effektus. Ha a lapkára egy rezonanciafrekvenciájával azonos frekvenciájú váltakozó feszültséget kapcsolunk, akkor a lapka rezgésbe hozható, vagyis elektromos úton mechanikai rezgés kelthető. A rezonanciafrekvencia a lapka geometriai méreteitől függ.

Az ultrahangok előállítása jelenleg szinte kizárólag az inverz piezoelektromos effektus segítségével, piezoelektromos lapkák elektromos úton történő rezgetésével történik.

Az ultrahang érzékelése viszont a direkt piezoelektromos effektussal lehetséges. Ha a hanghullám egy elektródokkal ellátott, megfelelő mérőáramkörbe kapcsolt piezoelektromos lapkára esik, azt a rezgésének megfelelő ütemben deformálja, és a lapka ennek megfelelő, mérhető elektromos jelet ad.

A hanterjedés néhány jellegzetessége

A hangforrás által létrehozott hangtér (az a térrész, ahol hanghullámok vannak) jellemezhető a közeg részecskéinek a hullám által okozott elmozdulásaival, a közegbeli elmozdulások sebességével illetve a nyomás- és sűrűségváltozásokkal.

Egyszerűség kedvéért vizsgáljunk egy harmonikus, longitudinális, *x*-irányban haladó síkhullámot. A közeg részecskéinek (*x*-irányú) elmozdulása (ψ) ekkor

$$\psi = A\,sin(\omega t - kx),$$

a részecskék sebessége pedig

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial t} = A\omega\,cos(\omega t - kx) = v_m\,cos(\omega t - kx),$$

ahol $v_m = A\omega$ a *sebességi amplitúdó.*

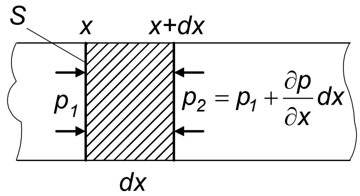
A nyomásváltozást a következőképpen kaphatjuk meg. A közegnek egy *S* alapú és *dx* magasságú térfogatelemére felírhatjuk a dinamika alapegyenletét:

$$F_x = ma_x = \rho_0 S dx \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$

ahol ρ_0 közeg átlagos sűrűsége.

Mivel az erő

$$F_x = (p_1 - p_2)S = -\frac{\partial p}{\partial x} dxS\,,$$



a mozgásegyenlet így alakul:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\,.$$

Az elmozdulás behelyettesítésével a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \omega^2 A \sin(\omega t - kx)$$

differenciálegyenletet, ebből pedig integrálás után a nyomás

$$p = p_0 + \rho_0 \omega c A \cos(\omega t - kx)$$

kifejezését kapjuk (itt felhasználtuk a $k = \omega/c$ összfüggést; p_0 az átlagos nyomás). A gyakorlatban rendszerint csak az átlagos nyomástól való eltérés, az ún. *hangnyomás* ($p' = p - p_0$) fontos, amire azt kapjuk, hogy

$$p' = \rho_0 \omega c A \cos(\omega t - kx) = p'_m \cos(\omega t - kx)\,.$$

A

$$p'_m = \rho_0 \omega c A = \rho_0 c v_m$$

mennyiség a *nyomási amplitúdó*.
A nyomási- és sebességi amplitúdó között fennáll a

$$\frac{p'_m}{v_m} = \rho_0 c$$

összefüggés, amely formailag az elektromos áramra vonatkozó Ohm-törvényhez hasonló, ahol a feszültségnek a nyomási amplitúdó, az áramnak a sebességi amplitúdó, az ellenállásnak a kettő hányadosa felel meg (a nyomás a sebesség oka → a feszültség az áram oka). Az így kapott

$$Z = \rho_0 c$$

mennyiséget az analógia alapján *a közeg hanghullám-ellenállásá*nak vagy *akusztikai keménységé*nek nevezik.
Néhány anyag akusztikai keménysége látható az alábbi táblázatban.

Anyag	$\boldsymbol{Z}=\rho_0 c$ (kg/m²/s)
acél	$4.5\cdot10^7$
vas	$2.5\text{-}4\cdot10^7$
alumínium	$1.7\cdot10^7$
víz	$1.5\cdot10^5$
levegő	$4.3\cdot10^2$

Hangátmenet közeghatáron
Kimutatható, hogy két kiterjedt közeg határára merőlegesen beeső hanghullám intenzitásának (I_b) visszavert (I_v) és átmenő ($I_á$) részét a közegek akusztikai keménységei határozzák meg. Az elmélet szerint a határfelületen történő visszaverődést jellemző α_v *visszaverődési fok*ot az

$$\alpha_v = \frac{I_v}{I_b} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}\,,$$

a határfelület $\alpha_á$ *áteresztőképességé*t pedig az

$$\alpha_{á} = \frac{I_{á}}{I_b} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

kifejezés adja meg.
Lemezen történő áthaladás esetén a viszonyok bonyolultabbak, mert ekkor a lemezben létrejövő rezonanciák lényegesen módosíthatják a visszaverődést és áteresztést.
Mivel a gázok akusztikai keménysége nagyon kicsi a szilárd anyagokéhoz viszonyítva, a fenti formulák alapján látható, hogy szilárd anyag és gáz határán a visszaverődés nagy, az áteresztés pedig igen kicsi. Ezért, ha ultrahangot szilárd anyagba akarunk bevezetni, akkor az adófej és a szilárd anyag közötti légrést valamilyen jól illeszkedő átmeneti réteggel (pl valamilyen kenőanyaggal) célszerű kitölteni. Ugyanez a helyzet a fordított hangátmenetnél is.