

Paraméteres mérések megbízhatóságának vizsgálata valószínűségelméleti számítással

Horváth Balázs*

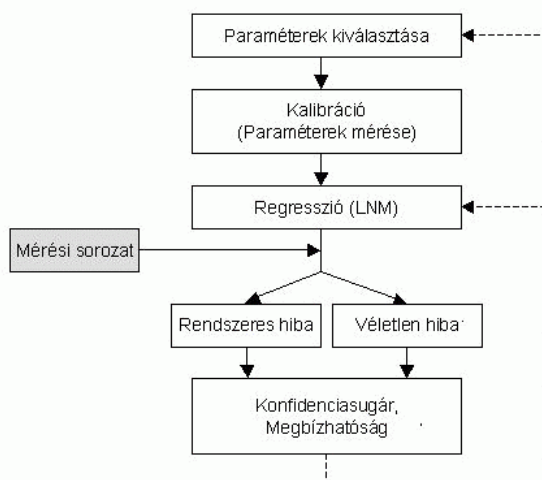
Ilmenau Műszaki Egyetem, Mikrotechnika Tanszék, PF 100565, 98684 Ilmenau, Germany

A paraméteres technikai mérésekhez a működési elvükből adódóan nem lehet konkrét feloldást rendelni. Mégis sokszor elengedhetetlen ezen mérések pontosságának a vizsgálata, pl. módszerek összehasonlításakor vagy a megfelelő mérőparaméter kiválasztásához. Ez a dolgozat egy olyan valószínűségi számítási algoritmust mutat be, ahol a konfidencia-intervallum meghatározásához mind a rendszeres mind a véletlenszerű hibákat figyelembe vesszük és ezzel a paraméteres mérés megbízhatósága egyetlen mérőszámmal kifejezhető.

Kulcsszavak: hibaszámítás, mérési megbízhatóság, valószínűségelmélet
Keywords: error model, measurement reliability, probabilities

1. Bevezetés

A paraméteres mérések elsősorban gyors, gyártásközi alkalmazásokban játszanak nagy szerepet. Jellemzőjük, hogy a mérendő mennyiséget egy vele arányosan változó paraméter segítségével közvetlen határozzuk meg. A mérendő mennyiség és a mérőparaméter jellemzően más fizikai jellemzőt takar (koncentráció/vezetőképesség, érdesség/fényszóródás, stb.), a köztük lévő kapcsolat általában nem ismert vagy nagyon összetett. Így azok nem hozhatók közvetlen összefüggésbe egymással és a méréshez nem tudunk egzakt feloldást rendelni. Mégis sokszor szükséges ezen eljárások pontosságának vizsgálata például a megfelelő mérőparaméter vagy mérőparaméter-kombináció kiválasztásakor.



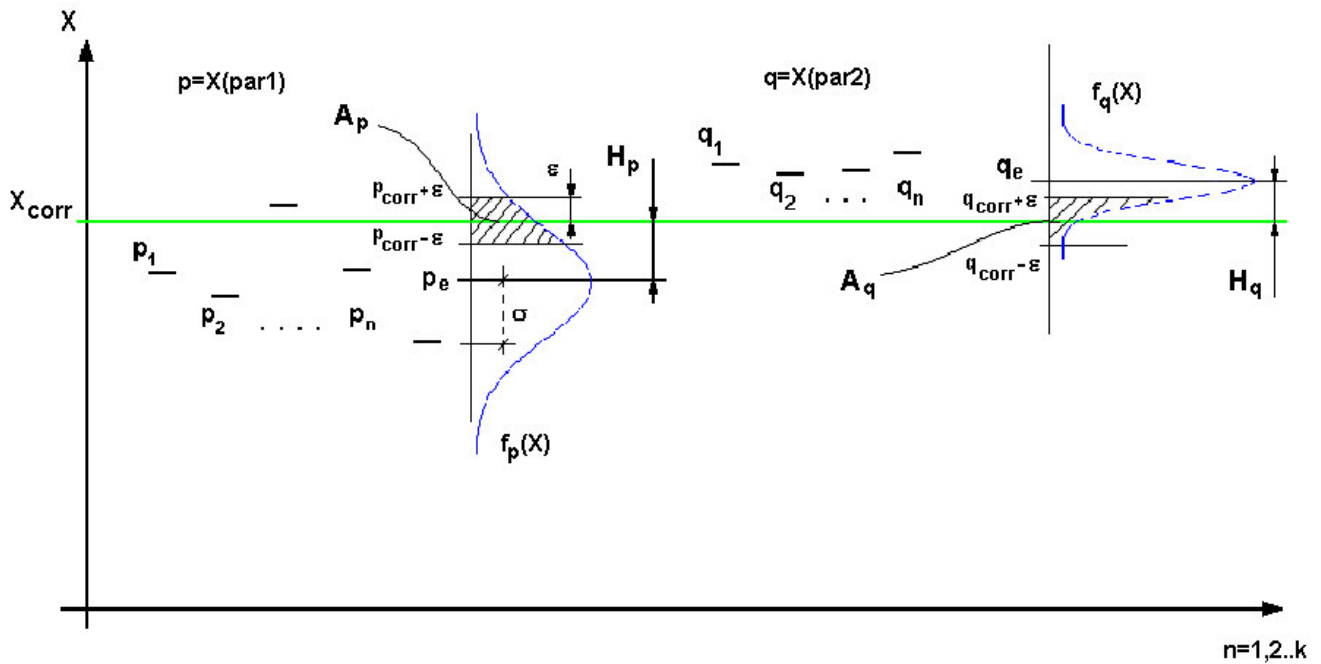
1. ábra: Paraméteres mérések kalibrálása

Ilyenkor legegyszerűbben próbaméréseket végzünk és az így kapott hiba minősíti a módszer pontosságát, ami egyben visszacsatolást is képez a megfelelő paraméter kiválasztásához, a regressziós modell pontosításához (lásd az 1. ábrát). Egy próbamérés-sorozatból hagyományosan kétféle hibát számolunk: a pontos értéktől való abszolút eltérés a mérés rendszeres hibáját jellemzi, míg a mérési eredmények szórása a véletlenszerű hibák eredőjét adja meg [1,2]. Könnyen belátható azonban, hogy egy paraméteres módszer megbízhatóságát mindkét hibafajta befolyásolja. A következőkben egy olyan valószínűségelméleti számítást mutatunk be, ahol a mérést jellemző konfidenciasugár meghatározásához mindkét hibát figyelembe vesszük. Ezzel egy biztos “mennyiségünk” lesz a mérés további optimalizálásához.

2. A megbízhatóság értelmezése paraméteres méréseknél

A paraméteres mérések pontosságának vizsgálatához a mérés technikában használatos konfidenciasugár-számításból indulunk ki. Ez alapján a cél egy olyan intervallum meghatározása a mért érték körül, amibe a pontos érték egy előre definiált valószínűséggel (szignifikancia-szint, ált. 95%) beleesik. A mérési eredmények megadásánál hagyományosan feltételezzük, hogy a mért érték és a pontos érték egybeesik és a konfidenciaintervallumot a mérési eredmények szórásából számítják. Mivel esetünkben a pontos értékek is ismertek (az alapján kalibrálunk), a vizsgálat tovább pontosítható. Példaként nézzük a 2. ábrát.

*Tel.: +493641 282589; fax: +493641 282530.
E-mail: bh1@innovent-jena.de



2. ábra: Rendszeres és véletlenszerű hibák paraméteres méréseknél

Vegyünk két eltérő mérőparamétert, p-t és q-t. Mindkét paraméterrel ugyanazt az X mennyiséget szeretnénk meghatározni, aminek a pontos értékét is ismerjük: X_{corr} (zöld vízszintes vonal a 2. diagramban). Azonban a pontos érték helyett p-vel p_1, p_2, p_n értékeket q-val pedig q_1, q_2, q_n értékeket mérünk eredményként. A kérdésünk az, hogy melyik paraméter használatával lesz a mérés megbízhatósága nagyobb?

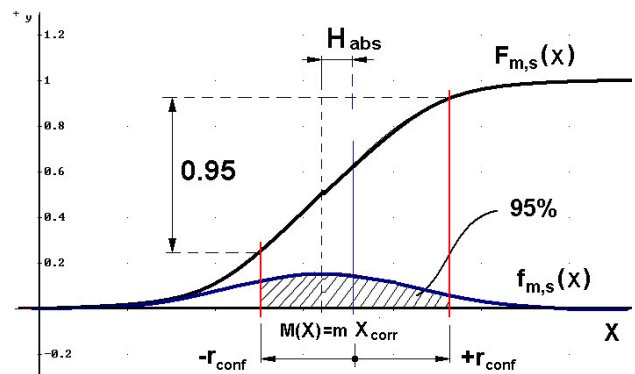
Legyenek a mérési eredmények átlagai p_e és q_e (várható értékek), amik körül p_n és q_n adatok normáleloszlásokat képeznek. Az ennek megfelelő sűrűségfüggvények két Gauss-görbéként vannak ábrázolva: $f_p(x)$ és $f_q(x)$. A várható értékek nyilvánvalóan nem esnek egybe a pontos értékkel, az eltérés p-nél H_p , q-nál pedig H_q , amik egyben az abszolút hibát is jelentik (a két paraméter eltérő szórással és abszolút hibával írja le az X mennyiséget). Könnyű belátni, hogy egy paraméter annál nagyobb biztonsággal használható, minél nagyobb a valószínűsége annak, hogy a pontos értéket mérjük. Ezek a valószínűségek matematikailag is kifejezhetőek mint:

$$P_p(X_{corr} - \varepsilon < X < X_{corr} + \varepsilon) = \int_{X_{corr} - \varepsilon}^{X_{corr} + \varepsilon} f_p(X) dX = A_p \quad (1)$$

$$P_q(X_{corr} - \varepsilon < X < X_{corr} + \varepsilon) = \int_{X_{corr} - \varepsilon}^{X_{corr} + \varepsilon} f_q(X) dX = A_q \quad (2)$$

ahol $\pm \varepsilon$ egy tetszőlegesen kicsiny intervallumot jelent a pontos érték körül. A P_p és P_q értékek megfelelnek a diagramban bevonalkázott T_p és T_q területeknek. Előfordulhat az az eset, hogy habár $H_q < H_p$, mégis a fenti valószínűségekre $P_q < P_p$ érvényes. Vagyis igaz, hogy a q paraméter kisebb abszolút hibát produkál, de ez a hiba „stabilan” jelentkezik (a kis szórás miatt) és a valószínűség, hogy a pontos értéket mérjük, kisebb.

Ebből látszik, hogy egy paraméter megbízhatósága azzal a valószínűséggel jellemezhető, amivel a mért érték egy a pontos érték körül felvett intervallumba esik. Ha a mérési pontosságot a gyakorlatban használt konfidenciasugárral akarjuk leírni, akkor az előbbi állítást meg kell fordítanunk: a valószínűség értékét a szokásos 95%-os szignifikancia-szintnél rögzítjük és az ehhez tartozó $\pm r$ konfidenciaintervallumot keressük. Ezt az esetet mutatja a 3. ábra: X jelöli a tetszőleges mérendő értéket, $F_{m,s}(X)$ az eloszlásfüggvény m várható értékkel és s szórással; $f_{m,s}(X)$ pedig a hozzá tartozó sűrűségfüggvény.



3. ábra: Konfidenciaintervallum paraméteres méréseknél

Most ki kell számolnunk, hogy mekkora $\pm r$ sugarat kell egy egyszeri mért érték körül felvenni ahhoz, hogy a pontos érték 95%-os valószínűséggel ebbe az intervallumba essen. Matematikailag kifejezve:

$$r = ? \quad \text{hogy} \quad P(X - r < X_{corr} < X + r) = 0.95 \quad (3)$$

További megfontolások alapján belátható: mivel X egy valószínűségi változó és X_{corr} egy konstans, a következő összefüggés érvényes rájuk [3]:

$$P(X - r < X_{corr} < X + r) = P(X_{corr} - r < X < X_{corr} + r) \quad (4)$$

Ez alapján a (3) valószínűség értéke a mért paraméter eloszlás-sűrűségfüggvényéből kifejezhető mint:

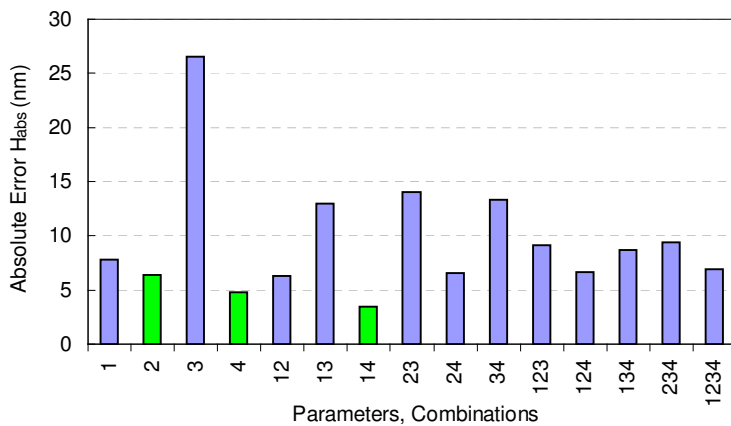
$$\begin{aligned} P(X - r < X_{corr} < X + r) &= \int_{X_{corr}-r}^{X_{corr}+r} f_{m,s}(X) dX = \\ &= F_{m,s}(X_{corr} + r) - F_{m,s}(X_{corr} - r) = 0.95 \end{aligned} \quad (5)$$

Ez azt jelenti, hogy a mért érték körül keresett konfidenciasugár megegyezik azzal az intervallummal a pontos érték körül, ahol a sűrűségfüggvény alatti terület 0.95 (lásd a vonalkázott területet a 3. diagramban).

3. A számítási algoritmus

Az előzőekben ismertetett eljárás alkalmas arra, hogy bármely mérőparaméter esetében az összes hiba által kiváltott mérési bizonytalanságot egyetlen mennyiséggel, az (5) képlettel számított konfidenciasugárral jellemezzük. Ezek alapján egy mérés megbízhatósága a következőképpen számolható:

1. Tesztsorozat mérése a kalibrált paraméteres eljárással lehetőleg minnél több mintavétellel ($n > 10$). Mért értékek számítása a felállított regressziós modell alapján.
2. Várható érték, korrigált empirikus szórás és az abszolút hiba számítása a mért értékekből. Normáleloszlás illesztése az eredményekhez és a sűrűségfüggvény meghatározása (ha később a méréseknél mintaátlaggal dolgozunk, akkor ennek megfelelően a mintaátlag szórását számoljuk az $s_{\bar{x}} = s_x / \sqrt{n}$ összefüggés szerint).



4. ábra: Az egyes paraméter-kombinációk abszolút hibái

3. Egy megfelelően kicsiny $\pm r$ kezdeti intervallum felvétele a pontos érték körül. Az intervallum szélesítése kis Δr lépésekben és a $P(X_{corr} - r < X < X_{corr} + r)$ valószínűségek számítása. Az iteráció folytatása a $P=0.95$ értékig. Az ehhez tartozó konfidenciasugár adja a paraméteres mérés megbízhatóságát az adott szignifikancia-szinten.

A kezdeti intervallumot és az iteráció Δr lépéseit a mérőparaméternek megfelelően választjuk. A 2. lépésben a $P(X_{corr} - r < X < X_{corr} + r)$ valószínűségeket az (5) összefüggésnek megfelelően az illesztett sűrűségfüggvény integrálásával számolhatjuk, vagy ha lehetőségünk van rá, a hibafüggvény segítségével:

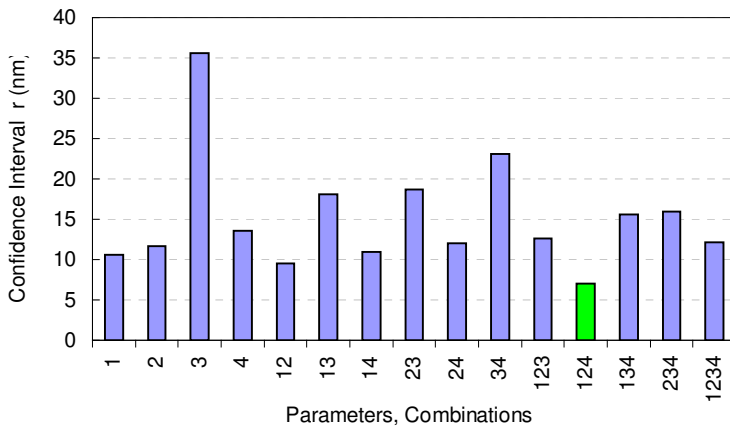
$$P = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}(\Delta + r)}{2s}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}(\Delta - r)}{2s}\right) \quad (6)$$

ahol $\Delta = X_{corr} - m$

4. Egy példa: paraméterek összehasonlítása

A következőkben egy példán keresztül mutatjuk be a fenti kiértékelési módszert. Egy felületvizsgáló eljárást szeretnénk kalibrálni, ahol a felületről reflektált koherens intenzitás minta statisztikai jellemzőiből a felület érdességére következtetünk [4]. Négy karakterisztikus jellemzőt választottunk ki e célra mérőparaméterként: 1: intenzitás, 2: kontraszt, 3: 2D-standardeltérés és 4: a pixelenkénti különbségek összege (intenzitás minták eltérése). Tapasztalat szerint mind a négy mennyiség kapcsolatban áll az érdességgel, azzal együtt változik. Első lépésben egy több mintából álló próbasorozattal kalibráltuk a mérőfelépítést és kiszámoltuk az egyes paraméterekre vonatkozó regressziós modelleket.

P	H _{abs} (nm)	P	H _{abs} (nm)
1	7.8	24	6.5
2	5.3	34	13.2
3	26.5	123	9.1
4	2.7	124	4.9
12	6.3	134	8.6
13	12.9	234	9.3
14	4.3	1234	6.8
23	14		



P	r (nm)	P	r (nm)
1	10.6	24	12
2	11.7	34	23.1
3	35.6	123	12.6
4	13.5	124	7
12	9.5	134	15.6
13	18.1	234	15.9
14	11	1234	12.1
23	18.6		

5. ábra: Az egyes paraméter-kombinációkhoz számított konfidenciasugarak

Szeretnénk meghatározni, hogy melyik paraméter vagy paraméter-kombináció adja a legbiztosabb mérést, ezért minden próbadarabot 25-ször újból lemértünk a kalibrált felépítéssel, beállítások megváltoztatása nélkül. Az így kapott tesztorozatból kiszámoltuk az abszolút hibákat az egyes paraméterekre és azok kombinációira. Az eredményeket a 4. ábra mutatja.

Mint látható, a 2, a 4 és az 1/4 paraméter-kombináció produkálja a legkisebb abszolút hibát. Ha most ezekben az esetekben elvégezzük az ismertett kiértékelési eljárást, akkor a konfidenciaintervallumokra az 5. ábrának megfelelő eredményeket kapjuk (a teljes érdességtartományra átlagolva).

Ha összevetjük ezeket az eredményeket a 4. ábrával látható, hogy az abszolút hiba és az összes hibából számított konfidenciasugár alapján felállított sorrend eltér egymástól. A legszűkebb konfidenciaintervallumot az 1/2/4 kombinációval tudjuk elérni (± 7 nm), így a mérésünk bizonytalansága ebben az esetben a legkisebb.

5. Összefoglalás, konklúzió

Egy olyan számítási módszert mutattunk be, amivel a paraméteres mérések megbízhatósága a kalibrálás utáni visszamérések eredményeiből meghatározható. A számítás valószínűségelméleti módszerrel történik és arra a kérdésre keresi a konzekvens választ, hogy az adott feltételek mellett mekkora valószínűséggel mérjük a pontos értéket. A mérés megbízhatóságát a konfidenciarugárral jellemezzük, de mivel a pontos értékek is ismertek (a hagyományos hibaszámítással ellentétben), a számításnál mind a rendszeres mind a véletlenszerű hibákat figyelembe vehetjük. Ezzel egy biztos mennyiség áll a rendelkezésünkre a mérőparaméterek megbízhatóságának összehasonlítására, a mérőmodell optimalására.

Irodalom

- [1] Frieden B.R.: Probability, statistical optics and data testing. Springer, Berlin, 1991.
- [2] Dietrich C.F.: Uncertainty, calibration and probability: the statistics of scientific and industrial measurement. Hilger, Bristol, 1991.
- [3] Mises R.: Mathematical theory of probability and statistics. Academic Press, New York, 1967.
- [4] Horvath B., Herztsch A.: Non-contact characterization of vertical regions of microstructures based on monochromatic speckle techniques. Measurement Science and Technology, 15, (923-932), 2004.