

# Acélcsővek szilárdsági számítása

(írta: Bokros István)

1. Bevezetés
2. Vékonyfalú egyenes cső méretezése belső túlnyomásra
3. Csőívek méretezése belső túlnyomásra
4. Hőfeszültségek vékonyfalú csövekben
5. Vastagfalú cső tisztán rugalmas állapota
6. Vastagfalú cső rugalmas - képlékeny állapota
7. Túlfedéssel illesztett vastagfalú csövek
8. Hőfeszültségek a vastagfalú csőben
9. Kettősrétegű szerkezetek hőfeszültségei

## 1. Bevezetés

A cső a folyékony vagy gőz-, ill. gáznemű, legáltalánosabban az ömleszthető közeggel dolgozó berendezések, technológiai rendszerek fontos alkotórésze. Üzemelhet összetett berendezés részeként, a szállításon kívül egyéb funkciókat is betöltve (pl. hőcserélőknél, bepárlóknál). Részesedésük a létesítmények beruházási költségeiben sem elhanyagolható, a vegyiparban az 50÷80%-os értéket is eléri. A tervezésükre fordítandó gondosságot meghatározza az, hogy az összeköttetéseknek már részbeni megszakadása is a technológiai rendszer egészének üzemzavarára, vagy akár katasztrófájára vezet. A csővezetékek szilárdsági számítása természetesen sok párhuzamot mutat a nyomástartó edények méretezésével, de különbségeket is találunk.

A csöveknél különösen a szabad hőtágulás meggátolásából származó feszültségek jelentenek problémát, de az alátámasztásból keletkező axiális feszültségek és a közegáramlásból származó impulzuserők hatása is jelentős mértékű lehet. A gyártásnál, szerelésnél bekövetkező alak és mérettűrési hibák a csöveknél jóval nagyobb hatásúak a nyomástartó edényekhez képest.

A csővezetékek általában a környezettől eltérő nyomású és hőmérsékletű közeget szállítanak. A méretezésnél figyelembe veendő számos hatás közül ezen kettőnek meghatározó szerepe van. Jelen segédletben a csövek belső túlnyomásra való méretezési formuláinak ismertetése mellett a hőfeszültségek számításával foglalkozunk.

## 2. Vékonyfalú egyenes cső méretezése belső túlnyomásra

A vékonyfalú egyenes cső méretezése belső túlnyomásra az MSZ 2970 szabvány szerint történik.

Varratnélküli acélcsővek esetén a szilárdságilag szükséges falvastagság:

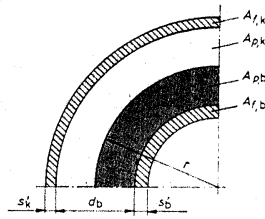
$$s' = \frac{pd_b}{2f_m - p} = \frac{pd_k}{2f_m + p}$$

A képlet  $d_k/d_b \leq 1,7$  átmérőviszonyig alkalmazható 3%-nál nem nagyobb ovalitás esetén.

## 3. Csőívek méretezése belső túlnyomásra

A csőívek szilárdságilag szükséges falvastagságát a felületösszehasonlító eljárás segítségével határozzuk meg.

A  $d_b$  belső átmérőjű  $r$  hajlítási sugarú csőív falában a kerületi irányú feszültség az ábra szerinti erőegyensúlyból:



$$pA_{p,b} = f_{t,b}A_{f,b}$$

és

$$pA_{p,k} = f_{t,k}A_{f,k}$$

Az ív belső oldalán az  $s_b$  vastagságú falban ébredő feszültség:

$$f_{t,b} = p \frac{A_{p,b}}{A_{F,b}}$$

ahol az

$$A_{p,b} = \frac{\pi}{16} (4rd_b - d_b^2)$$

és

$$A_{f,b} = \frac{\pi}{16} (8rs_b' - 4d_b s_b' - 4s_b'^2)$$

felületek a megfelelő negyedkörök területeinek kivonásával egyszerűen számíthatók.

Kiemelések és egyszerűsítések után

$$f_{t,b} = p \frac{d_b}{2s_b'} \cdot \frac{2r - d_b/2}{2r - d_b - s_b'} = p \frac{d_b}{2s_b'} \cdot B_b$$

A redukált feszültség értéke Mohr szerint

$$f_{R,b} = f_{t,b} - f_r$$

ahol a legkisebb főfeszültség, a radiális feszültség átlagértéke

$$f_r = -\frac{p}{2}$$

A redukált feszültség helyett az anyagra megengedett feszültséget írva megkapjuk az ívcső belső oldalán szilárdságilag szükséges falvastagság értékét:

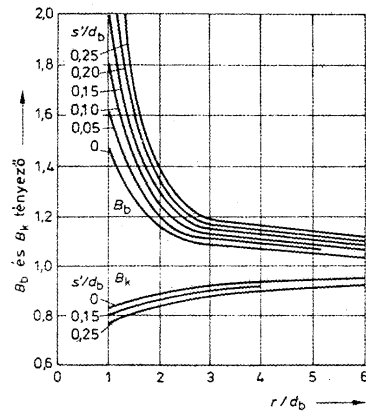
$$f_{R,b} = \frac{pd_b}{2s_b'} B_b + \frac{p}{2} = f_m$$

$$s_b' = \frac{pd_b}{2f_m - p} \cdot B_b = \frac{pd_b}{2f_m - p} \cdot \frac{2r - d_b/2}{2r - d_b - s_b'}$$

Mivel a meghatározandó falvastagság mindkét oldalon szerepel és explicit alakra hozása nehézkes, ezért iterációs eljárást alkalmaznak, ill. diagram (1. ábra) használata célszerű.

Az ívcső külső oldalán szükséges falvastagság a fenti gondolatmenet alkalmazásával:

$$s_k' = \frac{pd_b}{2f_m - p} \cdot \frac{2r + d_b/2}{2r + d_b + s_k'} = s' \cdot B_k$$



1. ábra Alaktényezők csőív falvastagságának meghatározásához

Megjegyzések:

- $s'$  az egyenes cső szilárdságilag szükséges falvastagsága
- az alaktényezők értékeire a  $B_b > 1$  és a  $B_k < 1$  egyenlőtlenségek állnak fenn
- $s'/d_b \leq 0,02$  esetén az alábbi közelítéssel élhetünk

$$B_b = \frac{2r - d_k / 2}{2r - d_k}$$

$$B_k = \frac{2r + d_k / 2}{2r + d_k}$$

Példaként számítsuk ki a DN 80 méretű szabványos acélcsőív szilárdságilag szükséges falvastagságát az ív külső és belső oldalán.

A csőív belső átmérője  $d_b = 82,5$  mm, hajlítási sugara  $r = 114,5$  mm, a megengedett feszültség  $f_m = 156$  MPa, a méretezési nyomás  $p = 8$  MPa.

Az egyenes cső szilárdságilag szükséges falvastagsága

$$s' = \frac{pd_b}{2f_m - p} = 2,17 \text{ mm}$$

A  $B_b$  és  $B_k$  szorzótényezők értéke  $r/d_b = 1,388$  és  $s'/d_b = 0,026$  függvényében az 1. ábra alapján:

$$B_b = 0,84 \quad B_k = 1,36$$

A szilárdságilag szükséges falvastagság az ívcső

- belső oldalán

$$s_b' = s' B_b = 1,82 \text{ mm}$$

- külső oldalán

$$s_n' = s' B_k = 2,95 \text{ mm}$$

#### 4. Hőfeszültségek vékonyfalú csövekben

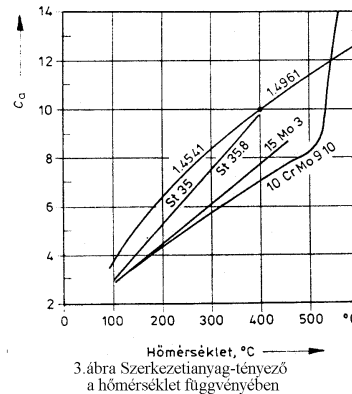
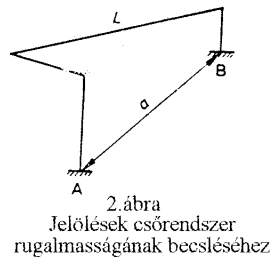
a) Külső kényszer okozta hőfeszültségek

A szabad elmozdulásukban gátolt csövekben a hőmérsékletváltozás hatására hőfeszültségek ébrednek. A mereven befogott acél csővezetésekre levezethető, hogy a megengedhető hőmérsékletváltozás kb.  $70$  °C. A legtöbb csővezeték üzemi és szerelési hőmérséklete közti különbség ezt a határt jóval túllépi, ezért gondoskodni kell a hőtágulás kiegyenlítéséről. Nem szabad azonban megengedni, hogy ez a kiegyenlítés a csővezeték rendellenes kihajlása által jöjjön létre, ami a csővezeték tönkremenetelét jelenti. A kiegyenlítés egyik lehetséges módja kompenzátorok alkalmazása, de történhet a kiegyenlítés kellő rugalmasságú nyomvonalvezetés megvalósításával is. Ez utóbbi különösen térbeli vezeték esetén bonyolult és számításigényes feladat, ezért a gyakorlatban

egy jól bevált egyszerű módszerrel győződhethetünk meg arról, hogy a keletkező feszültségek biztonsággal a megengedett értékek alatt maradnak-e. Feltételként elegendő a 2. ábrán az A és B pontot összekötő szakasz és az L teljes csőhossz hányadosát meghatározni. A kellően rugalmas rendszer legkisebb csőhossza „a” fixpontávolság esetén:

$$L_{\min} \geq a \left( 1 + C_a \sqrt{\frac{d_k}{a}} \right)$$

Az anyagjellemzőktől függő  $C_a$  tényező értéke a 3. ábrából vehető,  $d_k$  a cső külső átmérője. Amennyiben a feltétel nem teljesül a részletesebb számítás elvégzése mindenképpen indokolt.



b) A hőmérséklet-gradiens okozta hőfeszültségek stacionárius állapotban.

A csövek falán áthaladó hőáram (hővesztés még jól szigetelt csővezetékek esetén is van) hajtóereje a hőmérséklet-különbség. A fal elemi szálai egymással rugalmas kényszerkapcsolatban vannak, ezért az elemi szálak különböző hőmérséklete esetén hőfeszültségek keletkeznek.

Az itt közölt összefüggésekben a hőmérséklet eloszlása a kerület mentén és alkotóirányban állandó, a hőmérséklet csak a fal vastagsága mentén változik, de a hőmérsékletek időben állandók (stacionárius állapot). A hőfeszültségek képleteiben általában a fal  $t_1$  belső hőmérséklete a nagyobb. A fal  $t_1$  belső és  $t_2$  külső hőmérsékletét a hőátvitel (hőátbocsátás) feltételeiből kell kiszámítani.

Héjakban és sík lemezekben a sugár menti hőfeszültségek eloszlása lineáris, a kerületi és tengelyirányú hőfeszültségek nagysága azonos. A fal hőmérséklet-különbségével

$$\sigma_{ta}(t) = \pm \frac{\alpha E \Delta t}{2(1-\nu)}$$

A falon áthaladó  $q$  hőárammal, a fal  $\lambda$  hővezetési együtthatójával és  $s$  falvastagságával

$$\sigma_{ta}(t) = \pm \frac{\alpha E q}{2(1-\nu)} s$$

Ha a hengeres test (pl. cső) tengelyirányú szabad elmozdulását külső kényszer akadályozza, akkor a hőmérséklet-gradiensből származó tengelyirányú hőfeszültségre a kényszerből ébredő hőfeszültséget szuperponálni kell, természetesen ugyanez igaz az egyéb hatásokból (pl. belső nyomás) származó feszültségekre is.

### 5. Vastagfalú cső tisztán rugalmas állapota

A vastagfalú hengerben ébredő rugalmas főfeszültségek eloszlása egyenletesen megoszló  $p$  belső nyomás hatására:

- a tangenciális feszültség

$$\sigma_t = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

- a radiális feszültség

$$\sigma_r = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

- az axiális feszültség

$$\sigma_a = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

A  $k = r_1/r_2$  jelölést bevezetve a feszültségek a henger

- belső felületén ( $r = r_1$ )

$$\sigma_{t1} = p \frac{1+k^2}{1-k^2}, \quad \sigma_{r1} = -p, \quad \sigma_{a1} = p \frac{k^2}{1-k^2}$$

- külső felületén ( $r = r_2$ )

$$\sigma_{t2} = p \frac{2k^2}{1-k^2}, \quad \sigma_{r2} = 0, \quad \sigma_{a2} = \sigma_{a1}$$

A vastagfalú hengerekre jellemző, hogy a belső és külső szálon ébredő kerületi feszültségek különbsége független az átméroránytól:

$$\Delta\sigma_t = p$$

Egy  $p = 80$  MPa nyomáson üzemelő csővezeték méretei:

- belső átmérő  $d_b = 300$  mm

- falvastagság  $s = 100$  mm

Az átmérorány

$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_b}{d_k} = \frac{300}{500} = 0,6$$

A cső belső felületén ébredő feszültségek az előzőekben felírt egyenletek felhasználásával:

$$\sigma_{t1} = 170 \text{ MPa} \quad \sigma_{r1} = -80 \text{ MPa} \quad \sigma_{a1} = 45 \text{ MPa}$$

A mértékadó redukált (egyenértékű) feszültség a belső szálon a HMH- elmélet szerint:

$$\sigma_{e1} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{t1} - \sigma_{r1})^2 + (\sigma_{t1} - \sigma_{a1})^2 + (\sigma_{r1} - \sigma_{a1})^2]} = p \frac{\sqrt{3}}{1-k^2} = 216,5 \text{ MPa}$$

A cső külső felületén a tangenciális feszültség:

$$\sigma_{t2} = 90 \text{ MPa}$$

A redukált feszültség értéke

$$\sigma_{e2} = p \frac{\sqrt{3}k^2}{1-k^2} = 78 \text{ MPa}$$

A két szélső szálon számított redukált feszültségek aránya a szerkezeti anyag kihasználtságát jellemzi:

$$\beta = \frac{\sigma_{e2}}{\sigma_{e1}} = k^2 = 0,36$$

A

$$k^2 = \left(\frac{d_b}{d_k}\right)^2 = \left(\frac{d_k - 2s}{d_k}\right)^2 = \left(1 - \frac{2s}{d_k}\right)^2$$

kifejezésből látható, hogy a vastagfalú henger szilárdsági kihasználtsága - ha csak rugalmas feszültségeket engedünk meg - a falvastagság és az átmérő arányának növekedésével romlik. Ez indokolja a képlékeny állapotba való kerülés megengedését a henger (cső)  $r_F$  sugarú övezetében ( $r_1 < r_F < r_2$ ).

## 5. Vastagfalú cső rugalmas - képlékeny állapota

A belső nyomással terhelt vastagfalú hengerben a nyomás, a folyáshatár és a sugarak közti összefüggés:

$$p_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 + 2 \ln \frac{r_F}{r_1} - \frac{r_F^2}{r_2^2} \right] R_{eH}$$

ahol  $r_F$  a képlékeny állapot sugara,  $p_a$  az ezt megvalósító nyomás (autofretage)

A rugalmas teherbírás határa ( $r_F = r_1$ ), tehát sehol nem lesz képlékeny alakváltozás

$$p_{rug} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right] R_{eH} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - k^2) R_{eH}$$

A képlékeny teherbírás határa ( $r_F = r_2$ )

$$p_{kép} = \frac{2}{\sqrt{3}} R_{eH} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Tehát autofretage eljárásnál a terhelőnyomást

$$p_{rug} < p_a < p_{kép}$$

közé kell megválasztani.

A főfeszültségek értékei a képlékeny övezetben ( $r_1 \leq r \leq r_F$ )

$$\sigma_r = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 + 2 \ln \frac{r_F}{r} - \frac{r_F^2}{r_2^2} \right] R_{eH}$$

$$\sigma_t = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} R_{eH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 - 2 \ln \frac{r_F}{r_1} + \frac{r_F^2}{r_2^2} \right] R_{eH}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{r_F^2}{r_2^2} - 2 \ln \frac{r_F}{r} \right] R_{eH}$$

Főfeszültségek a rugalmas övezetben ( $r_F \leq r \leq r_2$ )

$$\sigma_r = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r_F^2}{r_2^2} \left( \frac{r_2^2}{r^2} - 1 \right) R_{eH}$$

$$\sigma_t = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r_F^2}{r_2^2} \left( \frac{r_2^2}{r^2} + 1 \right) R_{eH}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r_F^2}{r_2^2} R_{eH}$$

Tekintsünk az előzőekben tiszta rugalmas alakváltozásra számított csövet.  $R_{eH} = 235$  MPa folyáshatár esetén:

- a rugalmas teherbírás határa

$$p_{rug} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - k^2) R_{eH} = 86,8 \text{ MPa}$$

- a képlékeny teherbírás határa

$$p_{kép} = \frac{2}{\sqrt{3}} R_{eH} \ln \frac{r_2}{r_1} = 138,6 \text{ MPa}$$

Az előzetes túlterhelésnél a terhelőnyomást válasszuk meg úgy, hogy

$r_F = 193,65$  mm sugarú képlékeny övezet alakuljon ki. Az ehhez szükséges autofretage nyomás:

$$p_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 + 2 \ln \frac{r_F}{r_1} - \frac{r_F^2}{r_2^2} \right] R_{eH} = 123,5 \text{ MPa}$$

A gyártásnál fellépő főfeszültségek értékei a cső belső és külső szálán, valamint a rugalmas-képlékeny övezet határán az előzőekben felírt egyenletek egyszerűsítései után:

$r = r_1$  esetén

$$\sigma_{r1} = -p_a = -123,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t1} = -p_a + \frac{2}{\sqrt{3}} R_{eH} = 147,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a1} = -p_a + \frac{1}{\sqrt{3}} R_{eH} = 12,2 \text{ MPa}$$

$r = r_F$  esetén

$$\sigma_{rF} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{r_F^2}{r_2^2} \right) R_{eH} = -86,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{tF} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{r_F^2}{r_2^2} \right) R_{eH} = 184,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{aF} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r_F^2}{r_2^2} R_{eH} = 48,9 \text{ MPa}$$

$r = r_2$  esetén

$$\sigma_{r2} = 0$$

$$\sigma_{t2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r_F^2}{r_2^2} R_{eH} = 162,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a2} = \frac{1}{2} \sigma_{t2} = 48,9 \text{ MPa}$$

Megjegyzés: a képlékeny övezetben az axiális feszültség értéke már nem lesz állandó a sugár mentén.

A képlékeny övezet maradó alakváltozása miatt a  $p_a$  terhelőnyomást megszüntetve mindkét övezetben rugalmas feszültségek maradnak vissza. Az így tehermentesített vastagfalú csőben a visszamaradó feszültségeket a rugalmas-képlékeny és a tiszta rugalmas feszültségek különbségeként kapjuk.

$r = r_1$  helyen

$$\sigma'_{r1} = -123,5 - (-123,5) = 0$$

$$\sigma'_{t1} = 147,9 - 262,4 = -114,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_{a1} = 12,2 - 69,5 = -57,3 \text{ MPa}$$

$r = r_F$  helyen

$$\sigma'_{rF} = -86,8 - (-46,3) = 40,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_{tF} = 184,6 - 185,2 = -0,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_{aF} = 48,9 - 69,5 = -20,6 \text{ MPa}$$

$r = r_2$  helyen

$$\sigma'_{r2} = 0 - 0 = 0$$

$$\sigma'_{t2} = 162,8 - 138,9 = 23,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_{a2} = 48,9 - 69,5 = -20,6 \text{ MPa}$$

Az így előkészített csövet az autofretage nyomásnál kisebb, de a rugalmas teherbírás határánál nagyobb belső nyomással is megterhelhetjük. Például  $p = 120 \text{ MPa}$  üzemi nyomást választva a csőben ébredő feszültségeket az ezen a nyomáson tiszta rugalmas alakváltozás során keletkező és a gyártás során visszamaradt feszültségek eredőjeként kapjuk.

A rugalmas állapot feszültségei:

$$\sigma'_r = p \frac{k^2}{1-k^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t'' = p \frac{k^2}{1-k^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_a'' = p \frac{k^2}{1-k^2}$$

Az üzemi nyomás hatására fellépő tényleges feszültségek

$$\bar{\sigma} = \sigma' + \sigma''$$

a belső szálon ( $r = r_1$ )

$$\bar{\sigma}_{r1} = 0 + (-120) = -120 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{t1} = -114,5 + 255 = 140,5 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{a1} = -57,3 + 67,5 = 10,2 \text{ MPa}$$

a rugalmas-képlékeny övezet határán ( $r = r_F$ )

$$\bar{\sigma}_{rF} = -40,5 + (-45) = -85,5 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{tF} = -0,6 + 180 = 179,4 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{aF} = -20,6 + 67,5 = 46,9 \text{ MPa}$$

a külső szálon ( $r = r_2$ )

$$\bar{\sigma}_{r2} = 0 + 0 = 0$$

$$\bar{\sigma}_{t2} = 23,9 + 135 = 158,9 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{a2} = -20,6 + 67,5 = 46,9 \text{ MPa}$$

## **6. Túlfedéssel illesztett vastagfalú csövek**

Az egyrétegű, vastagfalú csövek kedvezőtlen szilárdsági kihasználása külső nyomással létrehozott előfeszítéssel javítható, ahogy ezt az autofretage eljárás vizsgálata is bizonyította. Ezt a külső nyomást úgy is létre lehet hozni, ha egy belső magcsőre túlfedéssel illesztett külső csövet (köpenycső) helyeznek. A köpenycsövet felmelegítik, majd ráhúzzák a magcsőre. A lehüléskor kialakuló  $p_0$  érintkezési nyomás a magcsövet külső, a köpenycsövet belső nyomással terheli.

Azonos szerkezeti anyagok esetén az érintkezési nyomás a túlfedés ( $\delta$ ) függvényében:

$$p_0 = \frac{E\delta}{2r_k \left[ \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} \right]}$$

ahol  $r_1$  a magcső belső,  $r_2$  a köpenycső külső sugara,  $r_k$  pedig a közös sugár.

Az átmérőviszonyok:

$$k_1 = \frac{r_1}{r_k}, \quad k_2 = \frac{r_k}{r_2}, \quad k = \frac{r_1}{r_2}$$

A feszültségek számítása az illesztési állapotban ( $p_b = 0$ ;  $p_k = 0$ ;  $r_k$ -nál  $p_0$ )

a magcsőben: 
$$\sigma_t = \frac{p_b r_1^2 - p_0 r_k^2}{r_k^2 - r_1^2} + \frac{(p_b - p_0) r_1^2 r_k^2}{r_k^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}$$

$$r = r_1 \quad \rightarrow \quad \sigma_{t1} = -p_0 \frac{1}{1-k_1^2} - p_0 \frac{1}{1-k_1^2} = -p_0 \frac{2}{1-k_1^2}$$

$$r = r_k \quad \rightarrow \quad \sigma_{tk} = -p_0 \frac{1}{1-k_1^2} - p_0 \frac{k_1^2}{1-k_1^2} = -p_0 \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2}$$

a köpenycsőben: 
$$\sigma_t = \frac{p_0 r_k^2 - p_k r_2^2}{r_2^2 - r_k^2} + \frac{(p_0 - p_k) r_k^2 r_2^2}{r_2^2 - r_k^2} \frac{1}{r^2}$$



$$r = r_k \rightarrow \sigma_{tk} = p_0 \frac{k_2^2}{1-k_2^2} + p_0 \frac{1}{1-k_2^2} = p_0 \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}$$

$$r = r_2 \rightarrow \sigma_{t2} = p_0 \frac{k_2^2}{1-k_2^2} + p_0 \frac{k_2^2}{1-k_2^2} = p_0 \frac{2k_2^2}{1-k_2^2}$$

A feszültségek üzemi állapotban ( $p_b = 0$ ;  $p_k = 0$ ;  $r_k$ -nál  $p_1$ ) a magcsőben:

$$\sigma_{t1} = p \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - p_1 \frac{2}{1-k_1^2}, \quad \sigma_{tk} = \sigma_{t1} - (p - p_1)$$

a köpenycsőben:

$$\sigma_{tk} = p_1 \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}, \quad \sigma_{ttk} = \sigma_k - p_1$$

Legkedvezőbb a terheléeloszlás, ha üzemi állapotban:

$$\sigma_{t1 \text{ magcső}} = \sigma_{tk \text{ köpenycső}}$$

A legkisebb feszültség megfelelően választott  $r_F$  értéknél lesz, ez szélsőértékszámítás alapján jó közelítéssel

a  $k_2 = k_1 = \sqrt{k} \rightarrow r_F = \sqrt{r_1 r_2}$  esetén teljesül.

Az üzemi nyomás és az átmérőviszonyok ismeretében  $p_1$  a  $\sigma_{t1}$  magcső =  $\sigma_{tk}$  köpenycső egyenlőségből kifejezhető:

$$p_1 = p \frac{1+k_1^2}{(1-k_1^2) \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + 2}$$

A  $k_1 = k_2 = \sqrt{k}$  optimális esetenél az üzemi körülmények között az illesztésnél kialakuló nyomás:

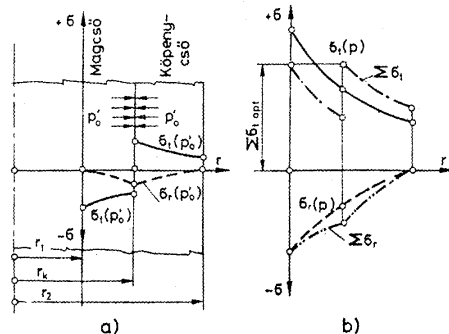
$$p_1 = p \frac{1+k}{3+k}$$

valamint a gyártásnál létrehozandó érintkezési nyomás:

$$(p_0)_{opt} = p \frac{1-k}{2(1+k)}$$

$r_k$  és  $p_0$  ismeretében  $\delta$  is számolható

$$\delta = \frac{p}{E} 2r_k$$



Tülfedéssel illesztett csövek feszültségei  
a) gyártás utáni állapot; b) a magcső és a köpenycső belső szálán azonos nagyságú eredő kerületi feszültség

## 7. Hőfeszültségek a vastagfalú csőben

Vastagfalú henger falában a sugárirányú hőmérséklet-eloszlás logaritmikus. A hőfeszültségek eloszlása, ha kerületi- és alkotóirányban a hőmérséklet nem függ a helytől:

$$\sigma_r(t) = \frac{\alpha E \Delta t}{2(1-\nu) \ln k} \frac{1}{r} \left[ -\ln \frac{r}{r_2} - \frac{k^2}{1-k^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln k \right]$$

$$\sigma_t(t) = \frac{\alpha E \Delta t}{2(1-\nu) \ln k} \frac{1}{r} \left[ -1 - \ln \frac{r}{r_2} - \frac{k^2}{1-k^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln k \right]$$

$$\sigma_a(t) = \frac{\alpha E \Delta t}{2(1-\nu) \ln k} \frac{1}{r} \left[ -1 - 2 \ln \frac{r}{r_2} - \frac{2k^2}{1-k^2} \ln k \right]$$

A henger belső felületén ( $r = r_1$ )

$$\sigma_{r1} = 0$$

$$\sigma_{t1}(t) = \sigma_{a1}(t) = -\frac{\alpha E \Delta t}{2(1-\nu) \ln k} \frac{1}{r_1} \left[ 1 + \frac{2}{1-k^2} \ln k \right]$$

A külső felületen

$$\sigma_{r2} = 0$$

$$\sigma_{t2}(t) = \sigma_{a2}(t) = -\frac{\alpha E \Delta t}{2(1-\nu) \ln k} \frac{1}{r_2} \left[ 1 + \frac{2k^2}{1-k^2} \ln k \right]$$

Tetszőleges  $t(r)$  hőmérséklet-eloszlás esetén a sugárirányú elmozdulást és a feszültségeket a következő összefüggésekkel lehet kiszámítani a vastagfalú henger  $r$  sugarú pontjában

$$w(t) = \frac{\alpha}{(1-\nu)r} \left[ (1+\nu) \int_{r_1}^r t(r) r dr + \frac{(1-3\nu)r^2 + r_1^2(1+\nu)}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} t(r) r dr \right]$$

$$\sigma_r(t) = \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^2} \left[ \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} t(r) r dr - \int_{r_1}^r t(r) r dr \right]$$

$$\sigma_t(t) = \frac{\alpha E}{(1-\nu)r^2} \left[ \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} t(r) r dr + \int_{r_1}^r t(r) r dr - t(r)r^2 \right]$$

$$\sigma_a(t) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[ \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} t(r) r dr - t(r) \right]$$

A szélső szálakban az elmozdulások és az ébredő feszültségek az integrálás elvégzése után  $r = r_1$  és  $r = r_2$  helyettesítéssel adódnak.

Ha vastagfalú hengerben a hőmérséklet az alkotó mentén lineárisan változik (pl. az ammóniakonverterekben) a kerületi hőmérséklet-eloszlást állandónak tételezzük fel, a  $t(r)$  sugárirányú eloszlással kifejezve az alkotó menti hőmérséklet-eloszlás az  $L$  hosszúságú vastagfalú hengerben

$$t(z, r) = \frac{z}{L} t(r)$$

a feszültségeloszlás

$$\sigma_r(t, z, r) = \frac{z}{L} \sigma_r(t)$$

$$\sigma_t(t, z, r) = \frac{z}{L} \sigma_t(t)$$

$$\sigma_a(t, z, r) = \frac{z}{L} \sigma_a(t)$$

Az alkotó menti változó hőmérséklet hatására ébredő nyírófeszültség eloszlása

$$\tau_{rz} = \frac{\alpha E}{L(1-\nu)} \left[ \frac{1}{r} \int_{r_1}^r t(r) r dr - \left( r - \frac{r_2}{r} \right) \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} t(r) r dr \right]$$

A szélső szálakban ( $r_1$  és  $r_2$  helyen) a nyírófeszültség zérus.

## 8. Kettősrétegű szerkezetek hőfeszültségei

A kettős- (vagy több-) rétegű szerkezetek fala különböző fizikai jellemzőjű anyagokból készülhet (plattírozott lemezek, falazott edények). Az eltérő hővezetési, hőtágulási együtthatók, rugalmassági modulusok és Poisson-tényezők esetén a falon áthaladó hőáram az érintkező felületen  $p_0$  érintkezési nyomást hoz létre, amely a belső köpenyt  $p_0$  külső, a külső köpeny  $p_0$  belső nyomással terheli. A hőmérséklet-gradiens iránya vagy pl. a belső fal kisebb lineáris hőtágulási együtthatója miatt az érintkező felületeken húzás alakul ki. Ha a szerkezeti elemek nincsenek szilárdan összekötve, akkor a rétegek elválnak egymástól. Belső nyomás esetén ilyenkor a magcső túlterhelődik, a belső nyomás a magcsövet a külső köpeny irányába mozdítja el, de a nyomásterhelést mindaddig a magcső veszi fel, amíg a köpenycsővel ismét nem érintkezik. Hasonló jelenség megy végbe a többrétegű, vastagfalú készülékek felfűtésekor és lehűtésekor. Az első esetben a gyártási rések záródnak, ennek következtében növekszik a súrlódást létrehozó érintkezési nyomás és javul a fal hővezető képessége. Lehűtéskor a belső réteg hőszugorodása miatt elválik a következő rétegtől, az érintkezési nyomás csökken, és a fal hővezető képessége (a fémes érintkezés hiányában) romlik. Ebből következik, hogy a tekercselt testek szilárdsága felfűtés és lehűtés közben is változik.

Kettősfalú hengerben, héjban (pl. plattírozott lemezből készítve) az érintkezési nyomás üzemi állapotban

$$p_0 = \frac{2E_1E_2s_1s_2}{r_k[(2-v_1)E_2s_2 + (2-v_2)E_1s_1]} \left[ \frac{r_k(2-v_1)}{2E_1s_1} p + (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t \right]$$

ahol  $\Delta t$  a szerelési és üzemi hőmérséklet különbsége. (Vékonyfalú edényekben a belső és külső falhőmérséklet különbsége általában nem nagy, különösen, ha a készülék szigetelt.)

$$\sigma_{t_2} = \frac{r_k p_0}{s_2}$$

az I bevonó- (plattírozó-) rétegben a kerületi feszültség

$$\sigma_{t_1} = \frac{r_k p}{s_1} - \frac{r_k p_0}{s_1}$$

Kettősrétegű, vastagfalú hengerekben a  $t_1(r)$  és a  $t_2(r)$  hőmérséklet-eloszlással és a szerkezeti anyagok megfelelő fizikai jellemzőivel a belső köpenyben (falazatban)

$$\sigma_{t_b} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-v_1} \left[ \left( 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{A}{B} \int_{r_1}^{r_k} t_1(r) r dr + \int_{r_1}^r t_1(r) r dr + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left( 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{1-v_1}{B} r_k^2 t(r) - t(r) \right]$$

$$\sigma_{r_b} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-v_1} \left[ \left( 1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right) \frac{A}{B} \int_{r_1}^{r_k} t(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r t(r) r dr + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1-v_1}{B} r_k^2 \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) t(r) \right]$$

$$\sigma_{ab} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-v_1} \left[ \frac{2}{r_k^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_k} t(r) r dr - t(r) \right]$$

A külső köpenyben a feszültségek

$$\sigma_{t_k} = - \frac{\alpha_1 E_1}{1-v_1} \frac{r_k^2}{r_2^2 - r_k^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_k^2} \right) \frac{A}{B} - \frac{1}{r_k^2} \right] \int_{r_1}^{r_k} t(r) r dt + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-v_1) \frac{r_k^2 - r_1^2}{B} t(r_k) \right\}$$

$$\sigma_{r_k} = - \frac{\alpha_1 E_1}{1-v_1} \frac{r_k^2}{r_2^2 - r_k^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_k^2} \right) \frac{A}{B} - \frac{1}{r_k^2} \right] \int_{r_1}^{r_k} t(r) r dt + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1-v_1) \frac{r_k^2 - r_1^2}{B} t(r_k) \right\}$$

A képletben szereplő állandók

$$A = \frac{E_1}{E_2} \left( \frac{r_2^2 + r_k^2}{r_2^2 - r_k^2} + v_2 \right) + v_1 \frac{r_k^2 + r_1^2}{r_k^2 - r_1^2} - 1$$

$$B = \frac{E_1}{E_2} (r_k^2 - r_1^2) \left( \frac{r_2^2 + r_k^2}{r_2^2 - r_k^2} + v_2 \right) + r_k^2(1 - v_1) + r_1^2(1 + v_1)$$