

## A hőmérsékleti sugárzás

(Dr. Paripás Béla előadásai alapján lejegyezték a Miskolci egyetem harmadéves informatikus hallgatói)

### Alapjelenségek

Mindennapi tapasztalat, hogy *a melegített testek hősugárzást (infravörös sugárzást) bocsátanak ki*. Például a forró kályha melegét a bőrünk a fűtőtesttől távol akkor is érzékeli, ha a szoba levegője egyébként még hideg. A testeket *tovább melegítve* azok *egyre nagyobb frekvenciájú* elektromágneses sugárzást bocsátanak ki (vörös- majd fehér izzás), miközben a kibocsátott *összenergia a hőmérséklettel rohamosan növekszik*. Mivel ezzel az elektromágneses sugárzás kibocsátó képességgel minden melegített test rendelkezik, ennek az oka nyilvánvalóan a test hőmérséklete és nem különleges összetétele. Így ezt a sugárzást hőmérsékleti sugárzásnak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy vannak különleges összetételű testek (fénycső, szentjánosbogár, stb.), amelyek *hidegen* is képesek fényt kibocsátani és sugárzásuk nem ebbe a kategóriába tartozik (*lumineszcencia sugárzások*). Már a múlt század első felében ismertté vált az a tény is, hogy hőmérsékleti sugárzást a *környezetüknél hidegebb testek is kibocsátanak*, ennek a mennyisége azonban kisebb annál, mint amit e tárgyak a környezet sugárzásából elnyelnek. Ehhez hasonlóan a hőmérsékleti egyensúly nem a hősugárzás hiányát jelenti, hanem csak azt, hogy a környezetével *hőmérsékleti egyensúlyban* lévő tárgy pontosan *annyi energiát sugároz ki, mint amennyit elnyel*. Szintén több mint egy évszázados az a felismerés, hogy a tárgyak sugárzás kibocsátó képessége (emisszióképesség) és sugárzás elnyelő képessége (abszorpcióképesség) egymással szigorúan arányos mennyiségek.

### Spektrális emisszióképesség: $e(\nu, T)$

A  $T$  hőmérsékletű test egységnyi felülete által egységnyi idő alatt a  $\nu$  körüli egységnyi frekvenciatartományban kisugárzott elektromágneses energia. Anyagfüggő.  
[teljesítménysűrűség / frekvencia]

### Spektrális abszorpcióképesség: $a(\nu, T)$

Megadja, hogy a  $T$  hőmérsékletű test a  $\nu$  körüli egységnyi frekvencia-tartományban a ráeső elektromágneses sugárzás hányad részét nyeli el. Anyagfüggő.  
 $0 < a(\nu, T) < 1$  (nincs dimenziója)

### KIRCHHOFF törvény:

$$E(\nu, T) = \frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} : \text{ anyagi minőségtől független univerzális függvény.}$$

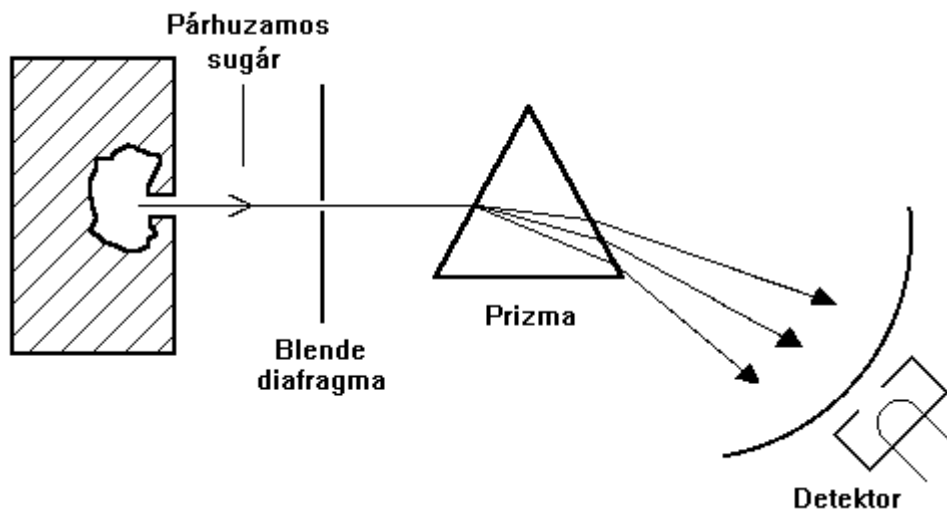
Azaz bár a test emisszióképessége és abszorpcióképessége anyagfüggő, a hányadosuk független az anyagi minőségtől.

A fizikában arra törekszünk, hogy anyagi minőségtől független egyenleteket alkossunk, ezért  $E(\nu, T)$ -t akarjuk használni.

Ha  $a(\nu, T) = 1$  akkor a test abszolút fekete test. Ekkor  $e(\nu, T) = E(\nu, T)$ .

### Az abszolút fekete test modellje:

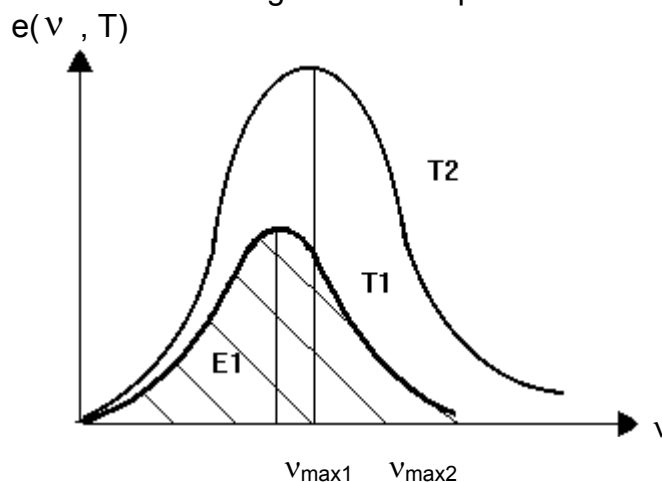
Legjobb modellje egy üreg falán lévő lyuk. Az üregbe a lyukon belépő sugárzás a szemközti falon szóródva igen kis eséllyel tud a lyukon visszamenni. A modell akkor jó, ha a lyuk mérete igen kicsi az üreghez képest. Még tökéletesebb a modell, ha az üreg fala maga is jó sugárzás elnyelő, például kormozott.



detektor: eszköz, melyben egy hőmérő a bejövő sugárzást méri

Izzítsuk a testet  $T$  hőmérsékletre, majd blendézzük ( blende = kicsi rések sorozata ).  
Bármely közeg törésmutatója függvénye a frekvenciának  $\Rightarrow$  DISZPERZIÓ /  $n = n(\nu)$  /

**Eredmény:** Az abszolút fekete test sugárzásának spektrális eloszlása.



$\nu_{\max 1}$  : a maximális spektrális emisszióhoz tartozó frekvencia  $T_1$  hőmérsékleten.

$\nu_{\max 2}$ : a maximális spektrális emisszióhoz tartozó frekvencia  $T_2$  hőmérsékleten.  $T_2 > T_1$

### Állítások:

1. Melegebb fekete test minden frekvencián jobban sugároz ( több sugárzást bocsát ki )
2. A kibocsátott összenergia ( egységnyi felület által kibocsátott összes energia ) :

$$E(T) = \int_0^{\infty} e(\nu, T) d\nu$$

$E(T)$  a hőmérséklet növelésével rohamosan növekszik.

Az ehhez tartozó kvantitatív képlet:

$$E(T) = \sigma T^4 \quad \text{Stefan - Boltzmann törvény}$$

( a kibocsátott összenergia az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos )  
 $\sigma$  : Stefan - Boltzmann konstans, értéke :  $5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$   
 ( ez az érték kísérletileg és elméletileg is bizonyított )

pl:  $T_2 = 2 T_1$

$$E(T_2) = 16 E(T_1)$$

Tehát kétszer magasabb hőmérsékletű test tizenhatszor több energiát bocsát ki.

3. Ha a hőmérséklet ( T ) nő, akkor a maximális spektrális emisszióhoz frekvencia ( $\nu_m$ ) is nő.

Minél jobban melegítjük annál nagyobb frekvenciájú a sugárzás.

$$\frac{\nu_{m2}}{\nu_{m1}} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{WIEN – törvény} \quad ( \text{Wien - féle eltolódási törvény} )$$

$$\left( \frac{\nu_{m2}}{T_2} = \frac{\nu_{m1}}{T_1} \right) \quad ( \text{Másik alakja} )$$

### **A spektrális eloszlásfüggvény $E(\nu, T)$ levezetése:**

(Planck 1900. December 14. a Porosz Akadémián 17 nappal a századunk előtt.)

#### 1. Lépés Rayleigh-Jeans törvény(levezetése)

A klasszikus termodinamika nem tudta megmagyarázni az eloszlásfüggvény alakját, ez csak a kvantummechanika segítségével látható be.

$U(\nu, T)$  : spektrális energiasűrűség: ez a 3. spektrális mennyiség. Jelentése: A  $\nu$  körüli egységnyi frekvenciatartományra eső elektromágneses sugárzás energiasűrűsége.

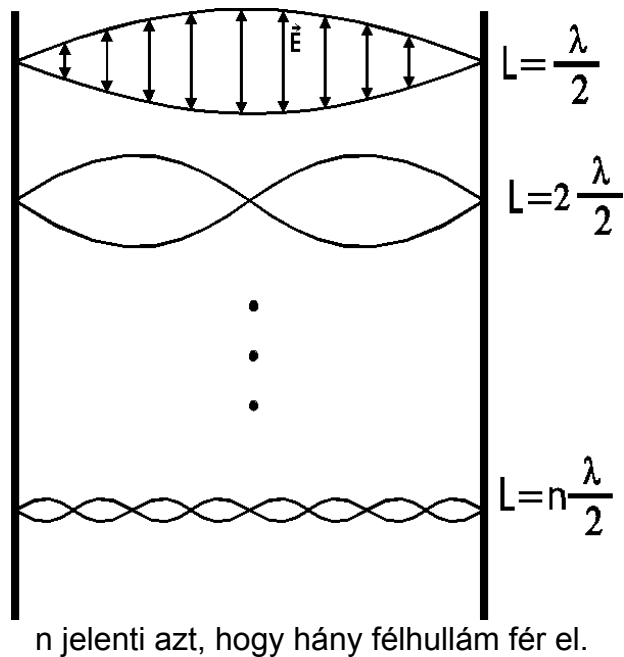
Bizonyítható:  $U(\nu, T) \sim e(\nu, T)$  (  $e(\nu, T) = c / 4 \cdot U(\nu, T)$  )

$$U(\nu, T) = Z(\nu, T) \varepsilon \quad \text{Ahol } Z \text{ a } \nu \text{ körüli egységnyi}$$

frekvenciatartományban, egységnyi térfogatban lévő állóhullám módusok száma,  $\varepsilon$  pedig az egy állóhullám módusra jutó átlagos energia.

Az üregben az elektromágneses sugárzás (energia) nyilvánvalóan elektromágneses állóhullámok formájában van jelen, hisz a sugárzás kitölti az üreget.

1 dimenzióban:



3 dimenzióban:  $n_1, n_2, n_3$  jellemzi az állóhullámot ( 1 dimenzióban csak  $n$  jellemezte ). Egy ilyen számhármassal jellemzett állóhullám az állóhullám módus. Mivel ilyen számhármassal végtelen sok lehet ezért végtelen sok állóhullám alakulhat ki, a módusok száma is végtelen.

**Állítás:**

$$z(\nu, T) \sim \nu^2$$

$$z(\nu, T) = K\nu^2 \text{ ahol } K \text{ az arányossági tényező, természeti állandó}$$

**Bizonyítás:**

Kiindulunk 1 dimenzióból:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{tudjuk: } \lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$L = n \frac{c}{2\nu} \xrightarrow{\text{kifejezve}} \nu = \frac{c}{2L} n$$

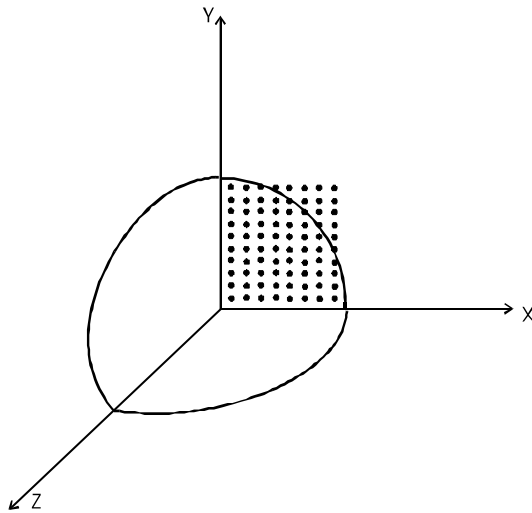
3 dimenzióban:

$$\nu = \frac{c}{2L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad \text{ilyen frekvenciájú állóhullám módusok alakulhatnak ki}$$

átalakítjuk:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left( \frac{2L\nu}{c} \right)^2$$

Az érdekel minket, hogy a  $\nu$  körüli egységnyi frekvenciatartományba hány állóhullám módus esik.



Annyi állóhullám módus létezik ahány pozitív helykoordinátákkal jellemzett pont van. Azon pontok melyeknek koordinátáinak négyzetösszege megegyezik, azok frekvenciája is megegyezik.

Megvizsgáljuk, hogy a  $\frac{2Lv}{c}$  sugarú gömbnyolcad egységnyi vastagságú héja hány pontot tartalmaz.

Következtetés: annyit amennyi a térfogata ( ez jó közelítés ha a gömbök nagyok )

A nyolcad gömb térfogata:  $V = \frac{1}{8} 4\pi \left(\frac{2Lv}{c}\right)^2 \cdot \frac{2L}{c}$   $dR = \frac{2L}{c} dv = \frac{2L}{c}$ , mert  $dv=1$

$V = 2\pi \frac{L^2 v^2}{c^2} \cdot \frac{2L}{c} = \frac{4L^3 v^2}{c^3}$  az állóhullám módusok száma ennek 2-szerese, mert az elektromágneses hullámban 2-féle polarizáció létezik.

$$z(v, T) = 8\pi \frac{L^3}{c^3} v^2$$

$$z(v, T) = \frac{Z(v, T)}{V} = \frac{8\pi}{c^3} \cdot v^2$$

$$U(v, T) = K v^2 \bar{\varepsilon} \quad ; \quad K = \frac{8\pi}{c^3}$$

$\bar{\varepsilon}$  : Egy állóhullám módusra jutó átlagos energia.

Klasszikus fizika szerint: Egy állóhullám módus a termodinamika szerint két termodinamikai szabadsági fokú rendszer.

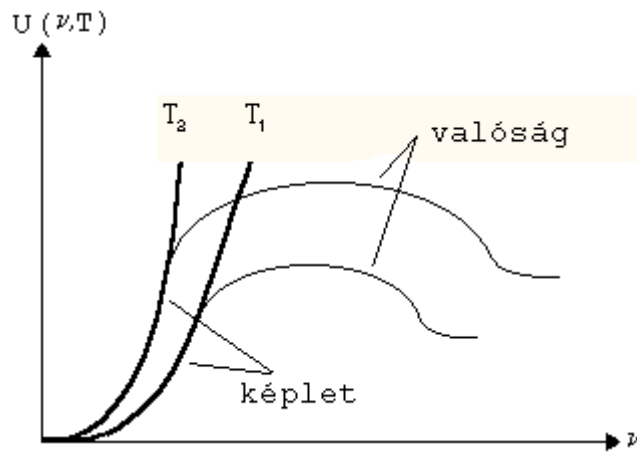
$$\bar{\varepsilon} = 2 \cdot \frac{1}{2} kT$$

$$\bar{\varepsilon} = kT$$

$$U(v, T) = K v^2 kT$$

Rayleigh-Jeans törvény

k: Boltzmann-állandó



A parabolák csak kezdetben írják le jól. Ez csak kis frekvenciánál igaz.

## 2. Lépés

**1900 dec. 14. Planck:**

A termodinamikában van a hiba. Nem jó az ekvipartíció minden körülmények között.

$$\text{Átlagos oszcillátor energia} = \frac{\text{összes energia}}{\text{összes oszcillátor}} = \text{oszcillátor} \cdot \text{módus}$$

Igaz a Boltzmann-féle energia eloszlás!

$$N(E_i) = \frac{e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}} = N_0 e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_i E_i N(E_i)}{\sum_i N(E_i)}$$

Diszkrét energiák összegeként képzeljük el! Ezeket a diszkrét cellákat kicsinyítjük, hogy folyamatos legyen.

$$E_n = n\varepsilon_1 \quad n: \text{egész szám } n=0,1,2,\dots$$

Ha  $\varepsilon_0$  tartana a 0-hoz, akkor visszakapnánk a folytonos energia esetét. Mindig ezt csináljuk a klasszikus statisztikában.

$$N(\varepsilon_n) = N_0 e^{-\frac{n\varepsilon_1}{kT}}$$

Képezzük a nevezőt!

$\bar{\varepsilon}$  nevezője:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(\varepsilon_n) = N_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} \right)^n = \frac{N_0}{1 - e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}}$$

Bevezetem a  $\xi = -\frac{1}{kT}$  változót.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} N_0 e^{n\varepsilon_1 \xi} = \frac{N_0}{1 - e^{\varepsilon_1 \xi}}} \quad 1.$$

Ezt deriváljuk  $\xi$  szerint:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} N_0 e^{n\varepsilon_1 \xi} n \varepsilon_1 = \frac{N_0 e^{\varepsilon_1 \xi} \varepsilon_1}{(1 - e^{\varepsilon_1 \xi})^2}} \quad 2. \quad n\varepsilon_1 : \text{energia}$$



$\bar{\varepsilon}$  számlálója

Az 1.-t és a 2.-t visszahelyettesítjük:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{N_0 \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 \xi} (1 - e^{\varepsilon_1 \xi})}{(1 - e^{\varepsilon_1 \xi})^2 N_0} = \frac{\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 \xi}}{1 - e^{\varepsilon_1 \xi}} = \frac{\varepsilon_1}{e^{-\varepsilon_1 \xi} - 1}$$

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1}{e^{\frac{\varepsilon_1}{kT}} - 1}}$$

**Kijön-e a klasszikus fizika eredménye? (Azaz ha  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ )**

$$e^{\frac{\varepsilon_1}{kT}} = 1 + \frac{\varepsilon_1}{kT} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\varepsilon_1}{kT} \right)^2 + \dots \text{ sorfejtés}$$

$$\bar{\varepsilon} \rightarrow \frac{\varepsilon_1}{1 + \frac{\varepsilon_1}{kT} + \dots - 1} = kT$$

Ha a feltételezett ugrások kicsik, akkor visszkapjuk a klasszikus fizika eredményét.

$\varepsilon_1 \rightarrow 0$  - ebbe kötött bele Planck. Planck feltételezése:

*Az átadható energiaadag egy véges érték egész számú többszöröse.*

$\varepsilon_1 \rightarrow 0$  annál inkább téves, minél nagyobb a frekvencia. Tehát kézenfekvő, hogy

$$\varepsilon_1 = h \cdot \nu$$

Planck bevezetett egy új változót: ez a  $h$  - Planck állandó

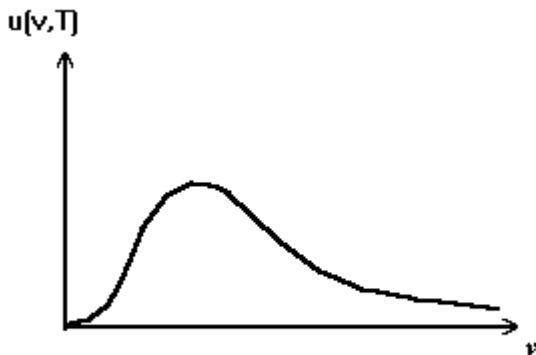
A kísérleti adatokkal akkor a legjobb az egyezés, ha  $h=6,63 \cdot 10^{-34}$  Js  
 Az adag neve idegen szóval kvantum.

Behelyettesítünk:

$$u(\nu, T) = K \cdot \nu^2 \cdot \bar{\varepsilon} = K \cdot \nu^2 \cdot \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1}$$

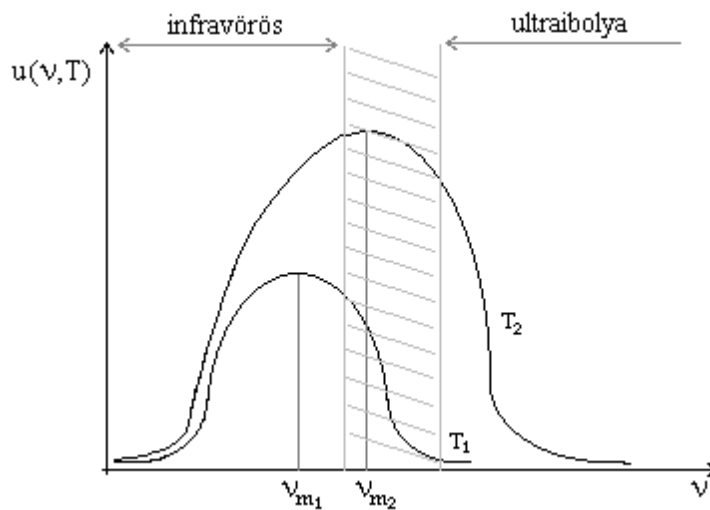
$$u(\nu, T) = K \cdot \frac{h \cdot \nu^3}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1}$$

**Ez a Planck-féle sugárzási törvény**



A Planck-féle sugárzási törvényből integrálással levezethető a Stefan-Boltzmann törvény, deriválással a Wien törvény.

Megjegyzés: a fényforrások hatásfoka



$T_1=3000$  K    $T_2=6000$  K

T1-nél láthatóra esik 5%  
 T2-nél láthatóra esik 39%



Célszerű a 6000 K hőmérsékletű fényforrást használni, körülbelül ennek a hatásfoka optimális. A Nap optimális fényforrás, pontosan 6000 K-es.

A 3000 K hőmérsékletű fényforrások (pl. izzólámpák) főleg hőt bocsátanak ki.

*Összefoglalva:*

$$\bar{\epsilon} = \frac{h \cdot \nu}{e^{k \cdot T} - 1} \rightarrow kT \text{ ha } T \rightarrow \infty \text{ és } \nu \text{ állandó vagy } \nu \rightarrow 0 \text{ és } T \text{ állandó}$$

↓

0 ha  $\nu \rightarrow \infty$  és  $T$  állandó vagy  $T \rightarrow 0$  és  $\nu$  állandó

A nagyfrekvenciás módusok általában nem léteznek.